Imprimatur,

HEN. ALDRICH,

Mar. 23. 169¾. } Vice-Can. *Oxon.*

† "a summe Rev° Abbate Schmidio, Helmstadiensium Theologo celeberrimo, cum adhuc Jenæ Mathesin et Philosophiam profiteretur."
Wolfii Elem. Matheseos Univers
Tom. V cap. 3. §6. p. 35.

Imprimatur,

HEN. ALDRICH,

Mar. 23. 169¾. } Vice-Can. *Oxon.*

† "a summe Rev° Abbate Schmidio, Helmstadiensium Theologo celeberrimo, cum adhuc Jenæ Mathesin et Philosophiam profiteretur."
Wolfii Elem. Matheseos Univers
Tom. V cap. 3. §6. p. 35.

ELEMENTA
GEOMETRIÆ,

In quibus
Methodo brevi ac facili ſumme neceſſaria ex *Euclide*, *Archimede*, *Apollonio*, & nobiliſſima veterum & recentiorum Geometrarum inventa traduntur

Per
P. IGNAT. GASTON PARDIES. *S.J.*
Gallico Idiomate conſcripta.

Poſt Tertiam Editionem
Latinitate Donata & JENÆ edita
In Uſum Studioſæ Juventutis.

OXONIÆ,
Typis *Leon. Lichfield*, Impenſis JOH. WILMOT, Bibliop. 1694.

UMI

Viro Illuſtri

NICOLAO CHRISTOPHORO

LYNCKERO,

JC^TO, Hæreditario Domino in Kötſchau, in Aula Saxo-Iſenacenſi & Regimine Tutelari Jenenſi Conſiliario Excellentiſſimo, Judicii Provincialis & Scabinatus Aſſeſſori, Collegii Juridici Seniori & Profeſſori Primario, Academiæ Salanæ hodie

RECTORI MAGNIFICO,

Patrono Obſervantiſſime Colendo

Perpetuam Felicitatem!

IGnoſce homini ad Themidos ſacraria proruenti. Gallus eſt, cui natura liberiorem indulſit ge-

nium. Non tamen miles, qui Tuos turbaret circulos, ſed mathematicus audit jamdudum doctorum volitans per ora virum. Hic poſtquam natale reliquit ſolum, mutato habitu, quod Jeſuitis ſolenne eſt, Germaniam perluſtrare conſtituit. Abhorret nihilominus eadem cum maleficis ſede locari; cum patris non promittat funus neque principum inquirat in annos; ſed mare & terram, numeroque carentem arenam metiri doceat. A me igitur, cui hactenus familiaris fuit, enixe petiit, ut Patronum conciliarem, ſub cujus tutela exterus apud exteros ſecurus vivere poſſet. Diu non deliberavi, ſed magnificum nomen Tuum ad id exorandum eſſe dixi. Dictum. Factum! Quapropter in

me

me converte iras, si quicquam in audendo peccatum fuit. Sivum tamen reputa, summum Tuum favorem, quem sine ullis meæ tenuitatis axiomatibus per sola postulata novo plane ac singulari conamine mihi demonstrasti, primos subjeciſſe igniculos. His enim observantia mea excitata, hanc sibi legem latam putavit, etiam otii & partium noctis rationem Tibi soli reddere. In Gallia quidem Auctor Chinenses, Europæis populis si Dis placet oculatiores, imitatus operam suam omnibus Academiæ Regiæ membris, tanquam judicibus, obtulit: Nunc vero eadem defertur ad Academiæ nostræ caput, quia Te solum ampliſſimum laboris hujus theatrum esse existimavi. Suscipe igitur Vir Illustris

serena

ſerena fronte, quod animo devoto calidiſque omnigenæ felicitatis votis offero, & futuris quoque temporibus perpetuum Nominis Tui cultorem benevolentiæ Tuæ radiis bea. Jenæ die 14. Martii cIↃ IↃC LXXXIV.

Illuſtri Nomini Tuo

Devotiſſimus

INTERPRES,

Joannes Andreas Schmidius.

Vid. Wolfii El. Math. Univ. Ind. Autorum in tom. V.

L. B.

ELementa Geometriæ magna facilitate demonſtrata hic accipis. Poſſunt ea omne tædium, quod incipientibus ex prima Euclidis lectione oritur, pleniſſime tollere. Erubui ſæpius, quando in explicatione Euclidis ab auditoribus mihi objiciebatur, cur hæc per ſe nota demonſtrantur, cur non breviori via id fit? &c. Cœpi igitur evolvere varios Euclidis commentatores, ſed alii prolixitate nimia, alii dum breves eſſe voluerant, obſcuritate laborabant, ad unum vero omnes ordini Euclideo ſtricte inhærebant. Tandem incidi in præſentem auctorem, cujus labor deſideriis incipientium ex aſſe ſatisfacere videtur. Abſit tamen, ut hoc ipſo Studioſæ Juventuti Euclidem è manibus excutiamus, aut quicquam ejus laudi detrahamus. Manebit illa ſemper illibata, quamdiu nomen mathematici eruditorum ordini inſertum erit.

Vi-

Viam potius planiorem reddet hoc opus, ut ad ipsa Euclidis adyta pervenire queamus. Hoc igitur cum nostrum sit propositum, interpretatio præsens æquum sperabit judicem. Fateor regulas bonæ interpretationis geniumque linguæ Gallicæ non semper observatum fuisse. Et qui fieri aliter potuit, cum stans quasi pede in uno & aliis quam plurimis districtus, unice in commodum quorundam DNN. Commilitonum eam absolverim. Si Deus majora nobis dederit otia, facile cuncta ad limam revocari poterunt. Vale & labori fave.

PRÆ-

*
* *

PRÆFATIO.

QUI conferent exiguam libelli hujuſce molem cum inſcriptionis ſuæ magnitudine, primo fortè intuitu abſterrebuntur inæqualitate, quæ inter utramque eſt; & timendum eſt, ne illi omnia hæc promiſſa adeò eximia habeant pro verbis audacioribus hominis qui facilè ſuſcipiat quæ præſtare non poſſit: ſed hos ego rogatos velim, ſuſpendant paulùm judicium ſuum, ac conſiderent in præſentia nonniſi dimidium horum Elementorum dari, & de ſedecim libris, quibus illa abſolvi debent, nonniſi novem nunc publicari, quoniam reliqui, abſtruſiora atque eminentiora Geometriæ inventa explicantes, incipientibus hanc artem addiſcere non adeò neceſſarii ſunt. Interea in primis hiſce libris non omittuntur quæcunque pulcra habentur in quindecim libris Euclidis, & præterea quæ Archimedes de quadratura circuli demonſtravit, Lunæ Hip-

Hippocratis, Logarithmi, Sinus, & alia quædam ejusdem generis. Videbitis hic mirabiles numerorum proprietates quas Euclides in septimo, octavo & nono Elementorum suorum demonstravit. Discetis hic demonstrationem magnitudinum incommensurabilium, *quæ fortè maximus est conatus cujus capax sit humana mens, quoniam dum scrutatum abit usque ad possibilitatem rerum, tantâ cum claritate ac perspicuitate id quod est & quod non est detegit; & quod in infinita multitudine comparationum, quas omnes observat tanquam possibiles inter duas magnitudines, demonstrat immobili quadam certitudine, neque ipsum Deum videre earum unam aptam quam suppeditet ut communem mensuram duarum harum magnitudinum. Verumenimvero licet hæc demonstratio pulcra sit, fatendum tamen est, eam satis esse difficilem; ii quibus inventivnem tantam debemus, non aliud nobis iter ostenderunt, quam quo ipsi fuerant usi, aut quod revera aliud non nossent, aut quod hac ratione voluerint partem laboris, quò defuncti fuerant vos quo-*

que

que experiri & simul gustare tanto majori cum gaudio delicias novi hujus mundi, quanto majori cum labore eò perveniſſemus. Quodcunque ſit, hæc via adeò longa plenaque difficultatum eſt, ut pauci, qui aut conſtantiæ ſatis ad ferendum ejus tædium habeant, aut virium ad ſuperandas moleſtias inveniantur. Neſcio an auſim dicere me ſatis fuiſſe felicem in detegendo novo itinere. Nec tamen admodum magnæ id mihi laudi foret: interdum audaculus nauta felicior eſt in nova quadam detectione, quam peritiſſimus navarchus, fortunaque idem in tempeſtate reperire ſinit, quod nemo perfectiſſima, quæ de re nautica haberi poteſt, cognitione detegere potuiſſet. Sic etiam contingere potuiſſet ut vaſta hæc Geometriæ maria percurrens, ſorte quadam offendiſſem novum aliquod iter & magnis hominibus qui me præceſſerunt incognitum. Nihilominus bonam hanc fortunam mihi attribuere non ſtudeo; illud tamen minimùm jure dicturus ſum, viam quam ego ingredior, iturus ad Incommenſurabiles, breviſſimam eſſe atque facilimam, ita ut exigua atten-

tione, quæ quatuor aut quinque saltim parvarum pagellarum lectioni dicanda est, exactè aliquis comprehendere possit rem quam pauciſſimi, etiam ex iis qui se Geometriæ penitus dedunt, intelligere queunt.

Posthæc de diversis progressionum generibus ago, ac peculiariter duabus magis celebribus, quæ sunt Geometrica & Arithmetica, insisto; easque inter se conferens Logarithmorum quoque tractationem suscipio, eorumque artificium ostendo mediante linea aliqua Geometrica, quæ admodum utilis erit ad resolutionem Problematum Algebraicorum de omnis generis dimensionibus. Hæc est illa linea quacum olim quadrare potui Hyperbolen; & quod non ita pridem amicorum quidam in Diario sive Actis Eruditorum Angliæ de iis, quæ de hac materia à peritiſſimis Geometris publici juris facta sunt, ostendit, adeò me non occupavit, ut potius cogitationem mihi injecerit, eos noluiſſe omnia quæ de hac re dici possent, nobiscum communicare. Finio autem primam hanc partem praxi Geometrica; quæ deberet contineri ultimo

no demum Elementorum omnium libro. Præter operationes faciliores communiores que, trado hic principia menſurandi magnitudines & diſtantias locorum inacceſſibilium, conficiendi tabulas Topo- & Chorographicas; inveniendi ſinus, tangentes & ſecantes omnium angulorum; ac tandem notitiam omnium eorum quæ ad hanc partem, quæ Geometria Practica vocatur, pertinent.

Poſthæc totidem libris tradam Algebram, Sectiones Conicas, Sphæricas, & Staticam; ſed ante omnia quinque aut ſex generales regulas ſtabiliam, e quibus deinceps, tanquam per corollaria, demonſtratio infinitarum propoſitionum, quæ pro palmariis in Geometria habentur, trahitur. Inde natura invenietur & menſura ſpatiorum Aſymptoticorum, quorum cognitio res eſt omnium maxime admirabilis, & quæ clariſſime magnitudinem ac ſpiritualitatem animæ noſtræ oſtendit; ſiquidem hæc ſolo ſpiritus ſui lumine ultra infinitum penetrans, adeo clarè res, quas nulla ſenſuum experientia eam docere, nullaque corporea facultas percipere

cipere ſaltem poteſt, detegit. Spatia hæc ſunt extenſionis actu infinitæ, comprehenſa inter duas lineas, quæ prolongatæ, in infinitum, non ſe unquam offendunt; unde ipſis nomen Aſymptotorum eſt. Interim hic demonſtratur, hæc ſpatia quoad longitudinem infinita, nihilominus circulo alicui aut alteri figuræ determinatæ æqualia eſſe: ita ut Infinitum ipſum, quam immenſum & quam innumerabile etiam illud eſt, nihilo ſecius ad calculum atque menſuram Geometriæ reducatur, & anima noſtra, major adhuc illo, ea comprehendere queat. Ex omnibus naturalibus, quas homo propria ratiocinatione acquirere poteſt, notitiis ſine dubio hæc Infiniti comprehenſio maximè eſt admirabilis: neque quicquam ego aptius video quod de animæ noſtræ exiſtentia nos convincat, atque doceat ultra materialem facultatem qua nobis res imaginamur medio organorum, eſſe nobis aliquam plane ſpiritualem ad cogitandum & ratiocinandum, quam omnium Philoſophorum maximus potentiam aliquam ab organis independentem, ſeparatam à materia, & ali-

und

unde quā à corpore venientem *appellat. Certè, quantaſcunque etiam vires intendemus, ut nobis infinitum imaginemur, ad extremum tamen ejus nunquam veniemus; & quamdiu in ſola ejus imaginatione nos detinebimus, formare ſeu concipere quidem nobis poterimus ſpatium aliquod vaſtæ diſtentionis, illud tamen ſemper erit determinatum: ſiquidem cum imaginatio, ut propriè loquamur, corporea quædam ſit potentia, quæ objecta non niſi per phantaſmata ac ſpecies ſenſibiles nobis repræſentat, ea ipſa, inſtar corporis, in repræſentationibus ſuis determinata eſſe debet. Et quemadmodum tabula aliqua oculis noſtris quandam extenſionem actu infinitam ſubjicere nequit, quia id quod limitibus in certo aliquo ſpatio circumſcriptum eſt id quod terminos nullos habet continere non poteſt: ita etiam Imaginatio quæ nihil aliud eſt quam tabula repræſentans imagines revera ſatis ſubtiles, ſed ſemper materiales, non niſi corporeas atq; limitibus comprehenſas res nobis oſtendere poteſt, cum tota infiniti immenſitas picturæ alicujus corporeæ*

terminis contineri nequeat. Imaginatio igitur eo usque non attingit, ut nobis infinitum repræsentet. Sed aliunde demonstratio quam de natura & proprietatibus immensæ hujus atque infinitæ extensionis asymptoticæ instituimus, nos pariter omnes convincit, haberi intra nos facultatem, quæ idonea sit hanc infinitam extensionem nobis repræsentare. Quemadmodum enim ut regulâ atque circino figuram in charta delineatam metiar, opus est me eam figuram præ oculis atque ad manus habere, quò instrumenta ad angulos ejus atque latera applicans, omnes ejus dimensiones sumere, & sic magnitudinem illius determinare possim; ita etiam ut rationis meæ regulâ mensuras spatii hujus asymptotici sumere queam, necesse est, ut ejus ideam aliquam intimè animo meo præsentem habeam; & ut idem animus, liceat ita loqui, huic ideæ atque interiori figuræ se applicans, ejus dimensiones accipiat, magnitudinem determinet, atque omnes ejus proprietates demonstret. Necessum itaque est ut agnoscamus claras & distinctas infinitæ alicujus extensionis ideas & re-

repræsentationes nos in nobis habere; & per consequens eam facultatem quæ ita nobis repræsentat id quod corpus nullum repræsentare potest, esse potentiam quandam purè spiritualem & à materia distinctam: adeò ut Geometria unica quadam demonstratione simul aliquam maximè admirabilium naturæ proprietatum, eodemque tempore unam è duabus maximi momenti veritatibus Moralibus probet.

Audebone ulterius etiam progredi, & dicere in hac ipsa demonstratione invictum quoque argumentum existentiæ, Dei repiriri? Novi equidem divinam naturam abyssum esse luminis, quod passim se diffundit, & in cæcissimorum etiam atque stupidissimorum animis sese inserit: sed nec minus novi, quousque progressa sit Libertinorum impietas, qui cum propriæ ac internæ refutationi resistere, aut sibi ipsis respondere nequeant, extrinsecus tamen aliorum demonstrationes eludere, intricato negotio de æternitate se munientes, conantur; & in tuto se esse sub infinita hac causarum dependentium multitudine, ac refugii locum

nunquam non invenire in æterna serie diversarum productionum, arbitrantur. Verùm Geometria, manifesto quodam asymptotorum exemplo, invicto argumento demonstrat, quod etiam in hac ipsa, quam prætendunt, causarum subordinatarum & dependentium unius ab altera in infinitum serie necessario veniendum sit ad primam aliquam naturam, quæ cum omnibus his causis particularibus cum concurrat, omnibusque temporibus correspondeat, quoque ipsa sit infinita & æterna, & quæ licet non sola ullam harum causarum sine concursu & determinatione aliarum producat, nihilominus generalis, quæ res omnes producit conservatque, causa existat.

Fortè, post hæc omnia, non nemo cogitabit me res hîc in epitome solùm tradere, hancque Geometriam iis quidem, quibus jam cognita esset hæc scientia, memorialis libelli loco futuram, non verò instituturam eos, qui eam addiscere cupiunt. Sed profiteor longè ab intentione mea hoc abesse, quæ nunquam fuit epitomen conficere: semper enim præ me tuli Geometriam confi-

cere,

cere, quæ incipientibus inſerviret, & ex qua illi etiam qui nunquam de Mathematicis rebus quicquam audiviſſent, brevi admodum tempore, non ſolum quod ſummè neceſſarium eſt in Geometria, ſed ſubtiliora quoque addiſcere poſſent. Non ignoro libros in hac materia breviſſimos non eſſe clariſſimos; atque in magno numero eorum, qui nobis lectionem atque cognitionem Euclidis faciliorem reddere voluere, plurimi ſatis ejus volumen minuerunt; propterea tamen non omne tempus quo ad eum intelligendum opus eſt, abbreviarunt.

Inter omnes Commentatores, maxime prolixus eſt, meâ quidem opinione, Clavius, Pater Fournier verò breviſſimus; nihilominus perſuaſum mihi eſt, longiori tempore opus eſſe ad mediocriter intelligendum Euclidem in Patre Fournier, quam in Clavio: adeò verum eſt, in Geometria ſtudii, ac laborum tempus non magnitudine aut parvitate voluminis metiendum eſſe. Itaque in inſtituto, quod erat, medium Scientiam hanc cum maxima qua poſſet facilitate addiſcendi tradere, non tam in ſcriptis brevis eſſe, quàm ut in modo procedu-

di facile intelligerer ſtudui; ſique hic libellus exiguus admodum apparet, non tàm illud brevitati demonſtrationum particularium adſcribendum erit, quam methodi generalis facilitati. Notandum enim eſt inter ea, quæ difficilem ac tædioſam Euclidis & vulgarium Autorum lectionem faciunt eſſe & illud, quod dum in ſummo illo rigore, quô nihil quod demonſtrari poſſit, quàm facile alias etiam appareat, ſine demonſtratione abire ſinunt, ſæpè accidit ut quod clarum fuiſſet, ſi animo id quale naturaliter videbatur propoſuiſſe ſatis habuiſſemus, poſtea difficile ac intricatum evadet, quando ad demonſtrationem regularem id reducere volumus. Imò & hoc obſervabis in Euclide, ut demonſtret propoſitionem aliquam magni momenti, longam adhibere propoſitionum ſeriem, quæ propriè nulli ſunt uſui quã ad probandam principalem hanc propoſitionem. Si itaque ſolâ explicatione ut veritas perſpiciatur efficere poßumus, abſque eo ut laboremus demonſtrare id de quo plenè convicti ſumus, & ſermones inſumamus, qui non videntur aliud facere, quam nos dedocere id quod igno-

ignorare non poſſumus, labore hoc certè ſuperſedebimus. Pari modo, ſi una vice omnes hæ principales atque magni momenti propoſitiones, abſque adhibita longa illa demonſtrationum ſerie, tantiſque apparatibus, demonſtrari poſſunt, habebimus procul dubio medium res inutiles reſcindendi: atque hoc eſt illud, quod ego me pluribus in locis præſtitiſſe arbitror, dum in unica quadam propoſitione demonſtro, quod aliàs non niſi tædioſâ illâ aliarum propoſitionum ſerie probatum fuit. Aliud, quo uſus ſum, medium abbreviandi, eſt res ad generalia certa principia reducere; quod non in hoc ſolùm libro feci, ubi per quinque ſexve regulas univerſales ferme infinitum numerum palmariarum propoſitionum demonſtro, ſed in multis aliis etiam locis, veluti quando de Sectionibus Conicis agens, quatuor illarum proprietates per unam proprietatum, quæ unicæ alicui ſectioni peculiaris eſt, demonſtro. E.g. eas omnes ſub proprietatibus Ellipſeos conſiderans, dico Circulum eſſe ellipſin, cujus duo foci ſe tangunt; Parabolam eſſe ellipſin, cujus duo foci ſunt in infinitum à

ſe

se invicem distantes; & Hyperbolen esse ellipsin cujus foci magis quam infinitum distant: quod optime procedit ac bene percipi potest, velut illo in loco explico.

Nonneminem sine dubio malè habebit quod consuetam methodum definitiones, principia & propositiones collocandi deseruerim; ac forsan ille me Geometriæ, sublatis illis, quæ ei semper dignitatem accuratissimæ scientiæ dederunt, injuriam facere credet. Alius quidam reprehendet, quod adhuc vetustos quosdam demonstrandi modos retinuerim, postquam moderni, per expolitam illam hujus in quo vivimus temporis rationem, demonstrationes multo magis naturales *dederunt, atque differentiam, quæ est inter* illuminare animos *atque* eos covincere, *ostenderunt. Objicietur mihi porrò, quod in pluribus negligentior fuerim; quod multas propositiones absque quod eas demonstrem præterierim; quod sæpè loca, quæ non directè id quod in quæstione est probant, citem; quod indifferenter* Conversa *& propositione ipsa utar. Ad hæc omnia verbo uno respondeo, me,*

cum

cum Geometriam cum omni qua fieri poſſet facilitate docere inſtituiſſem, hanc viam, quam inſtiti, maximè idoneam inveniſſe: quod non obſtabit, quo minus bonas hominum harum rerum peritorum de me opiniones lucrifaciam.

Interim animadverto, me dum omnimodam brevitatem hujus Opuſculi promitto, nimis longum in Præfatione eſſe. Veruntamen non me detineo in oſtendendis magnis Geometriæ utilitatibus; id ſolùm dico, eam ſi unquam in Scientiis naturalibus aut Artium praxi commodi quicquam attulit, nunc certe & his & illis ſumme eſſe neceſſariam. Notum eſt quousque ſeculo noſtro artium perfectio prolata ſit, & quantâ cum indagine res occultiſſimæ in Phyſica perpendantur. Eo modo quo his temporibus Phyſica docetur, Geometria æquè ac Mechanica, quæ nihil aliud eſt quam Geometria ad motum localem applicata, neceſſaria eſt, & qui maximâ hodie famâ clari ſunt, ab iis qui harum duarum cognitione inſtructi non ſunt, intelligi nequeunt. Quod Mechanicam attinet, ejus Elementorum, in diſſertatione de motu locali,

quam

quam meam profiteri non eſt quod pudeat, jam tradidi partem; atque ſpero cum eo quod hoc libro de Geometria nunc publici juris facio, duo magna haberi poſſe adminicula per quæ Phyſica, prout nunc traditur, intelligatur, rectèque de ea judicetur. Fortaſſis etiam obſervare licebit eos, quibus honori eſt Philoſophiam ſuam Geometriæ atque Mechanicæ fundamentis ſuperſtruxiſſe, non ſemper bene eſſe fundatos; & illud ipſum quod doctrinæ eorum incrementa dedit, inſervire poterit ad errores eorum agnoſcendos. Porro Lectorem moneo, me nullo modo eorum, quæ hoc opuſculo traduntur, auctorem haberi velle; undique quæ mihi placuerunt collegi: ac ſi quis heic quicquam reperiat quod à ſe inventum putet, aut ab alio quopiam, audacter id arripiat, Autorive ſuo attribuat, lubens ego conſentio, nec litem ei ullam movebo. Quod ſi quis forte fortuna quicquam hîc offenderit quod alibi non invenit, idque mihi tribuere velit, pro meo tunc id agnoſcam, metu ne plane pro deſerto habeatur.

MONI-

MONITA
Ad eos qui Geometriam diſcere cupiunt.

EOdem tempore quo legitur propoſitio, conſiderentur & appoſitæ figuræ. Laboris id principio eſt, ſed duobus tribuſve illæ diebus ſuperatur.

Non deſerendus eſt labor, ſi occurrant res, quæ non initio ſtatim comprehendantur; Geometria non tam facile quam hiſtoria quædam capitur.

Si poſtquam propoſitionem aliquam cum attentione legens, eam non intelligas, ulterius progredere; intelliges eam fortaſſe in ſequentibus, aut ad minimum tunc, cum omnibus perlectis de novo planè legere incipies.

Numeri qui inter Parentheſes reperiuntur, veluti e.g. (3. 24.) *notant id quod eo loco dicitur alibi probatum eſſe, nempe libro tertio articulo vigeſimo quarto: ita ut prior numerus librum, reliqui articulum ſignificent; eoſque articulos conſulere oportet, ut ſciatur probatio ejus quod legitur.*

Si

MONITA.

Si vocabula invenies quæ non intelligas, consule tabulam quæ in fine subjuncta est.

Maxime conducet initio Magistrum, qui has demonstrationes explicet, habere, eâ enim ratione multo facilius quam si ipse tantũ legeris hæc addisces.

Si quis laborem non subterfugerit in Collegium Claremontanum veniendi, Autorem horum Elementorum ea die Lunæ atque Veneris explicantem offendet.

Sperabam primo quoque tempore reliqua hujus Geometriæ in lucem edere ; verùm eorum impressionem aliquandiu differe coactus sum, quo spatium haberem alios Mathematicos tractatus multò magis necessarios publicandi. Quamprimùm Staticam, Opticam & Quadrantes, in quibus jamjam distineor, absolvo, continuo statim ordine Algebra, Sectiones Conicæ & reliqua quæ promisi, ut plena quædam & perfecta Geometria fiat, imprimentur.

IN-

INDEX

Vocum in hac Geometria explicatarum.

Primus numerus notat librum, & reliqui articulum.

A.

Æquilaterum 2. 7
Æquimultiplex 6. 15
Alternando, invertendo &c. 6.9.8
Amblygonium vel obtusangulum 2.6
Anguli alterni, interni 1.30
Angulus rectus, obtusus, acutus 1.17
Anguli externi trianguli 2.10
Anguli oppositi, deinceps 1.17
Angulus rectilineus, curvilineus, mixtus 1.6
Angulus subtensus vel oppositus 2.17
Arcus 1.11
Area, capacitas vel magnitudo figuræ 9.25

Cir-

INDEX.

C.

Circinus ſ. inſtrumentum proportionum 9.14
Circulus 1.10
Circumferentia *ibid.*
Commenſurabilis 7.4
Commenſurabilis potentiâ 7.33
Complementum in parallelogrammo 3.12
Complementum anguli 9.30
Congruæ figuræ 2.12
Converſa propoſitio 1.33
Convertendo, componendo &c. 6. 11. 12. *&c.*
Corpus ſ. ſolidum 1.4
Crura, latera circa angulum rectum trianguli 6.61
Cubicus numerus 7.39

D.

Diagonalis, diameter, linea ducta ex angulo in angulũ in parallelogrammis. 3.7
Diameter 1. 12. *&* 3.7

E.

Ex æquo, proportio 6. 13. 14

G.

Geometrica progreſſio 8.8
Gnomon 3.12

Gra-

INDEX.

Gradus progreſſionis 8.10
Gradus minuta, ſecunda 1.24

H.

Harmonica progeſſio 8.32
Homologa latera 6.31
Hypothenuſa, maximum latus trianguli rectanguli 6.61

I.

Incommenſurabilis 7.5
Invertendo, alternando &c. 6.8.9 *&c.*
Iſoperimetræ 4.32. *in fine*
Iſoſceles, triangulum habens duo crura æqualia 2.7

L.

Latera ſive radices numerorum 7.10
Logarithmi 8.26

M.

Magnitudo 6.1
Metiri 7.1
Minuta, gradus 1.24
Multiplicare lineam per aliam lineam, vel per ſuperficiem 6.17.18

N.

Numerus planus 7. 9. *ſolidus* 7.37.
Numeri plani ſimiles 7.14.

Nu-

INDEX.

Numerus quadratus 7.12. *cubicus* 7.39

O.

Obliqua, linea 1.17.
Oxygonium vel acutangulum 2.5

P.

Parallela 1.26
Parallelogrammum 3.2
Parallelogramma circa diametrum 3.12
Pars 7.2. *Partes* 7.3
Perpendicularis 1.15
Planum vel ſuperficies plana 1.5
Poſſe: linea poteſt bis aliam 7.32
Potentia prima 7.32 *ſecunda* 7.35
Problema, Theorema 9.1
Progreſſio Arithmetica 8.2. *Geometrica* 8.8
Harmonica 8.32
Progreſſio quadratorum, cuborum &c. 8.34
Proportio 6.6

Q.

Quadrilaterum, figura quatuor laterum 3.1
Quantitas 1.2
Quadrati-quadratum, ſurſolidus &c. 8.10

INDEX.

R.

Radix vel latus numerorum 7.10
Radius vel ſemidiameter 1.13. *vel ſinus totus* 4.7
Ratio 6.2
Ratio compoſita 6.26
Ratio duplicata 6.29.30. *Triplicata* 6.36
Ratio æqualis vel proportio 6.4.6
Ratio major 6.5
Reciprocæ 4.9
Rectangulum ſimpliciter pro parallelogrammo rectangulo 3.3
Rhombus 3.4
Rhomboides 3.5

S.

Scalenum, triangulum tribus lateribus inæqualibus 2.7. *Conus vel Cylindrus vel parallelopipedum.* 5.12
Secans, tangens, ſinus 4.9
Similia triangula 6.44. *Rectangula* 6.30
Sinus, tangens, ſecans 4.9
Sinus complementi 9.28
Solida 6.54. *Figuræ* 6.48.47
Solidum corpus 1.4. *Angulus ſolidus* 5.4
Superficies plana vel planum 1.4

Sur-

INDEX.

Surſolidus, quadratus, cubus &c. 8.20

T.

Tangens, ſinus, ſecans 4.9
Termini progreſſionis 8.1
Theoremata, Problemata 9.1
Trapezium quadrilaterum irregulare. 3.2

ERRATA.

P. 32. *l.* 23. quot. *p.* 44. *l.* 24. triangula. *p.* 62. *l. ult.* constitui. *p.* 65. *l.* 16. *d* 3. *p.* 66. & in 68 Fig. B pro D. *p.* 76. *l.* 12. Accelerationem. *p.* 84. *l.* 10. *b a. p.* 96. *l.* 23. dele *est. p.* 98. *l.* 1. dele *est. p.* 125. *l.* 23. præcedentem. *p.* 130. *l.* 6. dele *neque esse majores. p.* 138. *l.* 1. post. *p.* 139. *l.* 3. D d. *p.* 147. *l.* 15. c. *p.* 150. *l.* 15. e b. *p.* 177. *l.* 16. 29. *p.* 178. *l.* 10. inscriptum.

J. J.
ELEMENTA GEOMETRIÆ.

Liber Primus.

De lineis & angulis.

1. Per nomen *quantitatis* intelligimus rem, quæ comparata ad aliam ejuſdem naturæ, major vel minor, æqualis vel inæqualis appellari poteſt: ut ſunt extenſio, numerus, pondus, tempus, motus; hæc omnia, in quantum ita comparari poſſunt ſecundum plus velminus, ſunt objectum Geometriæ.

2. Nihilominus ſubſiſtimus tantum in conſideratione extenſionis, utpote quæ exemplum & menſura omnium aliarum quantitatum eſſe poteſt.

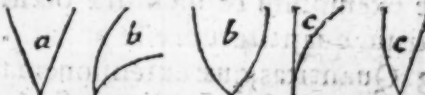
3. Quantitas, quæ extenſionem tantùm habet in longitudinem ſine ulla profunditate, appellatur linea; illa quæ extenſa eſt in longitudinem &

latitudinem, dicitur *superficies*: & illa quæ longitudinem, & latitudinem & profunditatem habet, appellatur *corpus* sive *solidum*.

4. *Punctum* est initium quantitatis, quod concipitur ac si nullam haberet extensionem, & undiquaque indivisibile esset: sic extrema, vel medium lineæ, sunt puncta.

5. Lineæ sunt vel *rectæ* vel *curvæ*: similiter superficies sunt vel *planæ* quæ *plana* dicuntur simpliciter: vel *curvæ*, quæ sunt vel *convexæ*, ut exterior superficies globi, vel *concavæ*, ut interior alicujus fornicis.

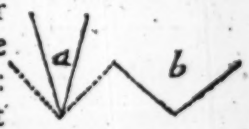
6. Quando duæ lineæ se mutuo tangunt in uno puncto, & postea altera ab altera recedit, oritur inter illas *angulus*, qui *Rectilineus* dicitur si duæ lineæ sunt rectæ, *a*: *Curvilineus* si sunt curvæ, *b*: *Mixtus*, si una est curva, altera recta, *c*.



7. Angulus tanto minor esse dicitur, quanto magis lineæ, quæ illum constituunt, ad se invicem inclinat[ur]
sunt

ſunt. Sumantur duæ lineæ *ab* & *ac*, quæ ſe mutuo tangant in *a*; ſi concipias, duas illas lineas moveri inſtar compaſſi, ita ut in *a*, tanquam clavo compaſſi, ſemper conjunctæ maneant, licet extremitas *c* recedat ab extremitate *b*; tunc obſervabis, quo magis extremitates à ſe mutuo recedent, eo majorem quoque evadere angulum inter illas conſtitutum: & contra, quo magis extrema ad ſe mutuo accedunt, eo magis lineæ ad ſe invicem inclinatæ erunt, & hinc angulus minor erit.

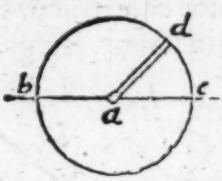
8. Hinc bene notandum, magnitudinem angulorum non æſtimari longitudine linearum, illos conſtituentium, ſed linearum inclinatione. Ex. gr. angulus *b* eſt major angulo *a*, licet lineæ ang. *b* ſint breviores: quoniam non ſunt ita inclinatæ ad ſe invicem, ut lineæ ang. *a*: Clarius, imaginare ang. *b* eſſe impoſitum ang. *a*, ceu monſtrant lineæ punctatæ, ang. *b* repræſentantes. Tunc videbis angulum *b* commode



intra se continere ang. *a*, lineasque ang. *a* magis ad se invicem inclinatas esse, quam lineas ang. *b*, & sic tandem ang. *a* multo minorem esse.

9. Angulus communiter tribus literis designatur, quarum media notat punctum contactus linearum, ut in fig. seq. *d a c* notat angulum per duas lineas *d a* & *c a* constitutum, ita ut *a* sit punctum commune, quo se lineæ mutuo tangunt.

10. Si concipiamus lineam *a d* in extremo *a* affixam medio lineæ *b c*, eamque præterea finamus moveri circa punctum *a*; tunc quando illa redierit ad eundem locum, ex quo moveri cœperat, descripsit lineam curvam



quæ appellatur *circulus*, vel potius *circumferentia* circuli: nam proprie loquendo, *circulus* est omne illud spatium, quod circumferentiæ includitur.

11. Pars circumferentiæ appellatur *Arcus*, ut *c d*.

12. Linea *b c* per circumferentiam terminata, appellatur *Diameter*, qui

dividit circulum in duas partes æquales, quod probare opus non est. Imo omnis linea recta ducta per *centrum*, id est, punctum *a*, dividet circulum in duas partes æquales, & ipsa etiam erit diameter.

13. Linea *a d* vel *a c* vel quævis alia ducta è centro ad circumferentiam, appellatur *Radius*, vel *semidiameter*.

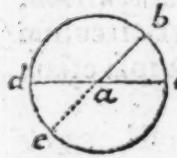
14. Omnes radii sive semidiametri unius circuli sunt æquales.

15. Quando extremitas *B* æqualiter distat à duobus extremis diametri *c* & *d*, id est, quando *B* est in medio semicircumferentiæ; tunc linea *B a* facit duos angulos *B a c* & *B a d*, qui *recti* vocantur, & utrinque sibi æquales sunt. Et si linea *B a* producta fuerit versus *e* faciet quatuor angulos rectos, & novam constituet diametrum, quæ cum priori circulum dividet in quatuor partes æquales.

16. Tunc etiam lineæ dicuntur perpendiculares una ad aliam, *B a* ad *d c*, & *d a* ad *B e*.

17. Ve-

17. Verum ſi *b* proximior eſt uni extremo diametri, quam alteri; tunc hæc linea dicitur *obliqua*, & facit utrinque duos angulos inæquales, quorum minor appellatur *acutus*, *b a c*; major vero *obtuſus*, *b a d*. Et ſi linea *b a* fuerit producta uſque ad *e*, erit illa nova diameter & infra duos novos angulos conſtituet: ita ut in univerſum adſint quatuor anguli, quorum duo, qui ſe tantum in puncto tangunt ut *b a c* & *e a d*, vel *b a d* & *c a e* appellantur *oppoſiti ad verticem*: illi vero, qui habent latus commune dicuntur *anguli deinceps*, ut *d a b* & *b a c*, vel *b a c* & *c a e*.

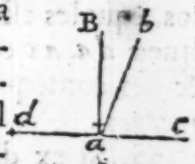


18. Anguli qui arcus æquales habent, etiam ſunt æquales. Ut ſi probetur arcum *c b* eſſe æqualem arcui *e d*, etiam probatum erit angulum *c a b* eſſe æqualem *e a d*.

19. Duo anguli deinceps, ſimul ſumpti, ſemper æquales ſunt duobus rectis. Nam linea *d c* eſt diameter, & cum

cum illa circulum in duas partes æquales ſecet, erunt duo arcus *c b* & *b d*, ſimul ſumpti, æquales ſemicircumferentiæ. Sic etiam duo anguli *c a b* & *b a d* ſimul ſumpti, æquales erunt duobus rectis, quoniam ſemicirculum adimplent, æque ac duo recti.

20. Hac ratione hæc propoſitio eſt generalis; cum linea recta ſuper aliam lineam rectam conſiſtit, duos angulos deinceps vel rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Nam ſi lineæ ſunt perpendiculares, ut *B a* ſuper *d a c*, anguli utrinque ſunt recti (15.) Si vero linea eſt obliqua, ut *b a* ſuper eadem *d a c*, tunc anguli quidem ſunt inæquales; ſed quantum obtuſus *b a d* ſuperat rectum *B a d*, tantum etiam acutus *b a c* ſuperatur ab alio recto *B a c*. Et ſic parvitas unius compenſatur magnitudine alterius.



21. Si duo anguli, latus commune habentes, æquales ſunt duobus rectis, reliqua latera efficient lineam

rectam. Sint anguli *d a b* & *b a c*, latus commune *b a* habentes, æquales duobus rectis, dico lineam *a d* cum linea *a c* constituere rectam lineam; (fig. art. 17.) quod manifestum est per jam dicta. Nam si è centro *a* ducatur circulus *d b c*, duo arcus *d b*, *b c* erunt æquales semicircumferentiæ; quoniam supponitur hos duos angulos æquales esse duobus rectis. Et sic lineæ *d a*, *a c* constituent diametrum, & per consequens erunt *positæ in directum.*

22. Si ex dato puncto *a* erigantur diversæ lineæ *a b*, *a c*, *a f*, *a d*, &c. illæ efficient diversos angulos; & omnes hi anguli simul sumti, vel si qui alii circa idem punctum constituerentur, erunt æquales quatuor rectis: Nam perspicuum est, omnes hos angulos complere circulum, cujus circumferentiam quoque dividunt in totidem arcus *b f*, *f e*, *e d*, *d c*, *c b*. Et sic omnes hi arcus simul sumti sunt æquales quatuor quadrantibus circuli, id est, omnes hi anguli

sunt

ſunt æquales quatuor rectis; nam etiam quatuor anguli recti adimplent circulum.

23. Anguli *oppoſiti ad verticem* ſunt interſe æquales. Sint duæ lineæ rectæ *d a c* & *b a e*, dico angulum *b a c* eſſe æqualem angulo *e a d*: nam arcus *c b*, cum arcu *b d* conſtituit ſemicircumferentiam, (12.) & eadem ratione arcus *b d* cum arcu *d e* etiam facit ſemicircumferentiam. Hinc arcus *b c* eſt æqualis arcui *d e*, quia arcus *b d* ſemper facit eandem quantitatem, ſive conjungatur cum arcu *b c*, ſive cum arcu *d e*. Ob eandem rationem angulus *d a b* eſt æqualis angulo *c a e*.

24. Tota circumferentia circuli dividitur in 360. partes æquales, quæ *gradus* appellantur, & quilibet gradus in 60. partes æquales, quæ ſunt *minuta*, & quodlibet minutum in 60. *ſecunda* & ſic in infinitum. Et quando magnitudo angulorum determinanda eſt, numerantur gradus, quos illi comprehendunt. Ex. gr. quando

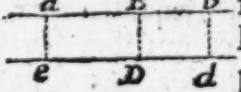
nominamus angulum 90. grad. tunc intelligimus angulum rectum, quia angulus rectus comprehendit quartam partem circumferentiæ, quæ continet 90. gradus, quia tota circumferentia continet 360, quorum quarta pars est 90. Similiter angulus 60. grad. est angulus qui facit duas tertias recti.

25. Gradus in scribendo notantur cifra, quæ numeris vel imponitur, vel à latere adjungitur. Minuta notantur virgula una I. Secunda per duas virgulas II: Tertia per tres III: Quarta per quatuor IV: &c. ut

0 I II

25. 32. 43. id est, 25. gradus, 32. minuta, 43. secunda.

26. Duæ lineæ dicuntur *Parallelæ*, quando illæ undique æqualiter à se invicem distant. Duæ lineæ *a b* & *e d* sunt parallelæ, si æqualiter distant in *a e* & in *b d*, vel in *B D* & in quovis alio loco.

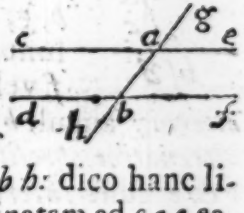


27. Hæc distantia mensuratur per perpendicula. Ut si quis concipiat ex puncto *a* lineam *a e* perpendiculariter

ter cadere ſuper *e d:* & eodem modo *b d* cadere perpendiculariter ſuper *d e;* ſtatim cognoſcet, quod poſitis illis duobus perpendiculis *a e*, *b d* æqualibus, etiam duæ lineæ *a b* & *e d* æqualiter ab invicem diſtent in his locis; quod natura notum eſt ſine ulteriori probatione.

28. Duæ lineæ parallelæ in infinitum productæ, nunquam concurrunt; nam cum ſemper æqualiter diſtent, ubivis licebit perpendiculares ducere æquales *a e* aut *b d:* & per conſequens nunquam ſe contingunt.

29. Si linea ſecat duas alias lineas parallelas, erit æqualiter inclinata ad utramque: & ſi linea ſecans duas alias, æqualiter ad utramq; inclinata eſt, hæ duæ erunt parallelæ. Sint duæ lineæ parallelæ *c a e*, *d b f* ſectæ per lineam *g a b h:* dico hanc lineam *g a b h* eſſe inclinatam ad *c a e*, eadem ratione ac ad *d b f:* id eſt, angulum *g a e* eſſe æqualem angulo *g b f*. Hoc natura notum eſſe videtur, ſi modo exigua attentione perpendatur. Nam



ſi

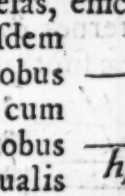
ſi angulus *g a e*, ex. gr. major eſſet, & linea *a e* magis remota ab *a g*, tunc punctum *e* lineæ *a e* inclinaret verſus *f*, quia *b f* tantum non recederet quantum *a e*: & ſic duæ lineæ *a e* & *b f* non eſſent parallelæ. Ulterius, ſi concipimus has duas lineas tanquam latera regulæ, poterimus totam regulam conſiderare tanquam lineam indiviſibilem. Sic anguli *h b d* & *c a g* erunt ut *anguli deinceps* æquales duobus rectis (20.) & ang. *h b d* & *g a e* erunt & duo anguli *oppoſiti ad verticem* inter ſe æquales. (23.)

30. Quando linea ſecat duas parallelas, efficit octo angulos, quorum quatuor *a*, *b*: *h*, *g*, ſunt *externi*, reliqui ſunt *interni*. Anguli *c* & *f* vel *d* & *e* appellantur *alterni*: anguli *b* & *f* vel *a* & *e* ſunt *alternative oppoſiti*: anguli *d* & *f*, vel *c* & *e* ſunt *interni ad eaſdem partes* lateris.

31. Anguli alterni & alternative oppoſiti ſunt inter ſe æquales, *b*, *f*; *c*, *h*; & *a*, *e*; *d*, *g*. (29)

32.

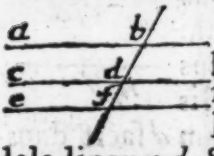
32. Quando linea hac ratione incidit in duas parallelas, efficit angulos internos ad eaſdem partes æquales duobus rectis; Angulus *d* cum ang. *f* eſt æqualis duobus rectis; quia *f* eſt æqualis ang. *c*. (31.) Sed *c* cum *d* facit duos angulos rectos: (20.) E. *f* cum *d* faciet duos angulos rectos, Q. E. D.



33. Propoſitio quædam appellatur *converſa* alterius, quando facta concluſione ex aliquo quod ſuppoſitum erat, poſtea in propoſitione altera converſa id ſupponitur quod concluſum erat, ut exinde colligamus quod ab initio ſupponebatur. Ex. gr. hîc dicimus, ſi lineæ ſunt parallelæ, anguli *d* & *f* ſimul ſumti æquales erunt duobus rectis, ubi ſupponimus lineas eſſe parallelas, & exinde concludimus: E. anguli &c. Converſa ſic fieret. Si anguli *interni ad eaſdem partes* lateris ſunt æquales duobus rectis, lineæ erunt parallelæ: ubi ex ſuppoſito, hos angulos eſſe æquales duobus rectis, concludimus lineas eſſe parallelas.

34. Con-

34. Converſæ h.l. ſunt veræ, nim. ſi linea duas alias lineas ſecans angulos alternos &c. æquales facit, hæ duæ lineæ ſunt parallelæ.



35. Si duæ lineæ ſunt parallelæ uni tertiæ, inter ſe erunt parallelæ. Sit linea *a b* parallela lineæ *c d*, & *e f* ſit etiam parallela *c d*, dico *a b* eſſe parallelam *e f*: nam ſi ducatur linea *b d f* omnes tres ſecans, angulus *b* erit æqualis ang. *d* (31.) & eodem modo angulus *f*, erit æqualis angulo *d*: (31.) E. angulus *b* eſt æqualis ang. *f*, quia axioma eſt, ſi duo ſunt æqualia eidem tertio, inter ſe ſunt æqualia. Quoniam igitur angulus *b* eſt æqualis ang. *f*, ſequitur lineam *a b* eſſe parallelam lineæ *e f*. (34)

LIBER

LIBER SECUNDUS.

De Triangulis.

1. *Figura* eſt ſpatium undique circumſcriptum. Si lineæ illam terminantes ſunt rectæ, appellatur figura *rectilinea*: ſi curvæ ſunt, appellatur *curvilinea*; & ſi partim rectæ partim curvæ, vocatur *mixta*.

2. Figuræ ſunt vel *planæ*, quæ ſunt in ſuperficie plana, vel *ſolidæ*, quæ ſunt corpus cum tribus dimenſionibus. Hic agimus tantum de figuris planis.

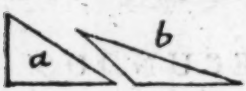
3. Omnes lineæ, quæ figuram circumſcribunt, ſimul ſumtæ, conſtituunt *circumferentiam*, vel *Perimetrum*, vel *circuitum* figuræ.

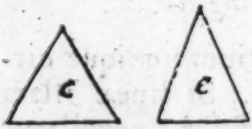
4. Ex omnibus figuris planis curvilineis vel mixtis, circulus tantum conſideratur, vel pars circuli terminata arcu & una vel pluribus lineis rectis.

5. Inter figuras rectilineas ſimpliciſſima eſt *Triangulum*, quod terminatur tribus lineis, tres angulos conſtituentibus.

6. Tri-

6. Triangulum, habens angulum rectum, appellatur *Triangulū rectangulum, a:* habens angulum obtusum, appellatur *obtusangulum* vel *Amblygonium; b:* habens tres angulos acutos, dicitur *acutangulum* vel *Oxygonium c, e.*

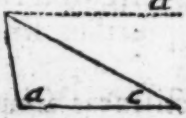




7. Quando triangulum omnia latera habet inæqualia, appellatur *Scalenum a, b:* Si duo latera sunt æqualia, est *Isosceles, e:* si omnia latera sunt æqualia, est *æquilaterum, e.*

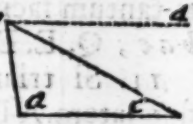
8. Si duo saltem latera trianguli sumuntur, appellari possunt *crura*, & tertium tunc appellabitur *basis.* Omne latus potest sumi pro base.

9. In omni triangulo tres anguli simul sumti sunt æquales duobus rectis.



Sit triangulum *a b c*, dico angulum *a*, una cum angulo *c*, & ang. *a b c* respondere duobus rectis: nam si concipiamus lineam *b d* esse parallelam lineæ *a c*, hæ duæ

duæ lineæ parallelæ ſecantur per tertiam *b c*, & per conſequens anguli alterni erunt æquales, id eſt, angulus *c* eſt æqualis ang. *c b d* (1. 31.) Ulterius, linea *b a* incidens in lineas parallelas *b d* & *a c*, facit angulos internos ad eaſdem partes lateris æquales duobus rectis (1. 32.) id eſt, angulus *a b d*, una cum angulo *a* eſt æqualis duobus rectis. Sed angulus *a b d* eſt



compoſitus ex duobus angulis, quorum alter eſt *a b c* (unus ex numero trium angulorum ipſius trianguli,) alter *d b c*, quem æqualem eſſe diximus ang. *c*. E. m. tres anguli, nim. *a b c*, una cum *c* & *a* duobus rectis æquales erunt; Q. E. D.

10. Producta baſi cujuſcunque trianguli, angulus externus eſt æqualis duobus internis oppoſitis. Sit triangulum *a b c*, & producatur latus *c a* ad *e*, habebis angulum *b a e*, qui appellatur angulus *externus* trianguli. Jam dico angulum

hunc

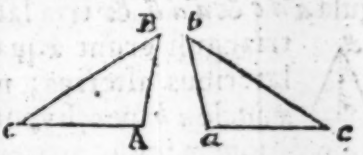
hunc externum *b a c* esse æqualem duobus angulis *b* & *c*, qui sunt *interni oppositi*; nam hi duo anguli *b* & *c* cum tertio *b a c* simul sumti faciunt duos rectos, (per præced.) & similiter hic tertius angulus *b a c* cum angulo *b a c* facit etiam duos rectos: (1. 20.) E. anguli *b* & *c* simul sumti tantum faciunt, quantum angulus *b a c*; Q. E. D.

11. Si triangulum A B C habeat duo latera A B & A C æqualia duobus lateribus *a b* & *a c* alterius trianguli; & si præterea angulus A sit æqualis angulo *a*: dico tertium latus B C etiam esse æquale *b c*, & angulum B angulo *b*, & C angulo *c*, & totum triangulum A B C toti triangulo *a b c*. Nam si concipiamus triangulum *a b c* esse superimpositum triangulo A B C, ita ut latus *a b* exacte respondeat A B, quod illi æquale est, tunc etiam latus *a c* cadet super A C, quia supponitur angulum *a* esse æqualem angulo A; & sic punctum *c* cadet super C, quia

quia *a c* eſt æquale A C: E. m. *b c* cadet ſuper B C, & per conſequens ipſi erit æquale; ſimiliter angulus *c* erit æqualis angulo C, & angulus *b* angulo B, & totum triangulum toti triangulo, quoniam omnia ita ſibi congruunt, ut triangulum ſuperimpoſitum, neque excedat alterum, neque ab eo excedatur.

12. Figuræ, quæ ſibi exacte reſpondent, ſi una ſuperpoſita fuerit alteri, dicuntur figuræ *congruæ, quæ mutuo ſibi congruunt:* & hoc eſt axioma generale, *quæ mutuo ſibi congruunt, æqualia ſunt.*

13. Etiam converſa præcedentis propoſitionis vera eſt; nimirum, ſi triangulum habet tria latera æqualia tribus lateribus alterius trianguli, omnes anguli unius etiam æquales erunt angulis alterius, & area ſeu ſpatium unius trianguli erit quoque æquale areæ alterius: Ut ſi A B eſt æquale, *a b*, & A C, *a c*, & B C, *b c*: dico angulum



A

A esse æqualem angulo *a*, & B angulo *b*, & C angulo *c*, totumque triangulum A B C toti triangulo *a b c*; quod non indiget probatione.

14. Si angulus A est æqualis ang. *a*, & angulus B ang. *b*, & latus A B lateri *a b*; erit etiam latus A C æquale lateri *a c*, & B C lat. *b c*, & totum triangulum A B C toti triangulo *a b c*; quod facile probari potest per præcedentes.

15. In omni triangulo Isoscele duo anguli, quos crura æqualia ad basin constituunt, sunt inter se æquales. Sit triangulum *a b c*, cujus crus *a b* sit æquale *a c*, dico angulum *b* esse æqualem angulo *c*: nam si concipiamus basin *b c* esse divisam æqualiter in *d*, linea *a d* efficiet duo triangula *a d c* & *a d b*, & tria latera unius trianguli erunt æqualia tribus lateribus alterius; nam *a c* est æquale *a b* per hypothesin vel suppositionem ipsius propositionis; & *d c* est æquale *d b*, quia hic supponimus basin *b c* esse æqualiter divisam in *d*. Tertium latus *a d* est commune utri-

utrique triangulo: ſic tria latera unius ſunt æqualia tribus lateribus alterius, & per conſequens totum triangulum *a d c* eſt æquale toti triangulo *a d b*, & angulus *c* ang. *b*; (2. 13.) Q. E. D.

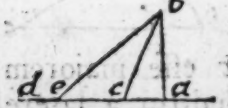
16. In omni triangulo Iſoſcele, ſi linea cadens ex angulo verticis dividat baſin bifariam, id eſt, in duas partes æquales, tunc ad eandem baſin perpendicularis eſt, ac angulum quoque verticis bifariàm ſecat: nam angulus *a d c* eſt æqualis ang. *a d b* per præcedentem: & per conſequens uterque rectus eſt, & linea *a d* perpendicularis ad *b c* (1.15.) Similiter angulus *d a c* eſt æqualis angulo *d a b*, per præcedentem.

17. Omnis trianguli majus latus majorem angulum *ſubtendit*; id eſt, majori angulo oppoſitum eſt. Sit latus *b c* majus latere *a c*, dico angulum *a* ſubtenſum à latere *b c* eſſe majorem angulo *b*, qui ſubtenditur à latere *a c*: nam cum *b c* ſit majus *c a*, concipe *c d* eſſe æquale *c a*, ita ut *a d c* ſit tri-

triangulum Iſoſceles: Ergo (2. 15.) angulus *c a d* erit æqualis angulo *c d a*. Sed angulus *c a b* eſt major angulo *c a d*, *totum enim eſt majus ſua parte*. Ergo angulus *c a b* eſt major angulo *c d a*. Ulterius, cum angulus *c d a* ſit externus reſpectu minoris trianguli *d a b*, major erit ſolo interno *b*: (2. 10.) Ergo multo magis, angulus *c a b* erit major angulo *b*. Q. E. D.

18. Omne triangulum neceſſario habere debet duos angulos acutos: nam ſi tantum unum haberet, reliqui duo eſſent vel obtuſi, vel recti, vel unus obtuſus & alter rectus. Sed nullum horum eſſe poteſt, cum (2. 9.) omnes anguli ſimul ſumti duos tantum rectos faciant.

19. Omnium linearum, quæ duci poſſunt à puncto dato ad lineam datam, breviſſima eſt perpendicularis,



& illæ ſunt longiores, quæ magis recedunt à perpendiculari. Sit data linea *a d*, & punctum datum *b*; ſit præterea *b a* perpendicularis ad *d a*, à qua *b e* ma-

magis remota quam *b c*: dico *b a* esse brevissimam omnium linearum possibilium, ex gr. *b c*: & præterea, *b e* esse longiorem *b c*: Nam in triangulo *a b c* angulus *a* est rectus,& per consequens maximus omnium, quia reliqui duo necessario esse debent acuti: (2. 18.) Ergo latus *b c* est majus latere *b a*. (2.17.) tanquam subtensum majori angulo. Similiter in triangulo *b c e* angulus *b c e* est obtusus, quia angulus *b c a* est acutus, & per consequens latus *b e* erit majus latere *b c* (2. 17.) tanquam subtendens majorem angulum.

20. In omni triangulo duo latera simul sumta majora sunt tertio. Sit triangulum *a b c*, dico latus *a b*, una cum *a c*, esse majus solo *c b*: Nam si

producta *b a*, & concipiatur *a d* æquale *a c*, erit triangulum *a d c* Isosceles, & per consequens angulus *a c d* erit æqualis angulo *d*: (2. 15.) Ergo angulus *d c b*, qui major est ang. *d c a*, etiam major erit ang. *d*: Jam si conciperes *b d c* tanquam unum triangulum, latus *b d* erit majus latere *c b*, (2.17.) tanquam

quam ſubtenſum angulo majori. Sed *b d* eſt æquale duobus lateribus *b a*, *a c*, quia *a d* eſt æquale *a c*: Ergo duo latera *b a*, *a c* ſunt majora *b c*; Q.E.D.

21. Etſi hæc propoſitio demonſtrata ſit, nihilominus pro principio naturæ noto admitti poteſt. Nam linea *c b*, cum ſit recta, facit viam breviſſimam

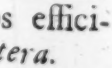
à puncto *c* ad punctum *b*, dum interim reliquæ *c a b*, vel etiam *c d b* vel *c e b* circuitum faciunt, & per conſequens longiorem viam abſolvunt. Similiter illud cum Archimede pro principio ponere poſſumus, illarum linearum, quæ tales circuitus faciunt, iſtas eſſe longiores, quæ ſuo ambitu alias circumſcribunt vel includunt, & ſic *c d b* eſſe longiorem *c e b*, & *c a b* longiorem *c d b*; quod tamen intelligendum non eſt de illo caſu, ubi lineæ efficiunt figuram dentatam, ut in hac figura, ubi lineæ *c f f b* longiores eſſe poſſunt *c a b*, non obſtante quod circumſcribantur circuitu *c a b*.

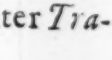
LIBER

LIBER TERTIUS.

De Quadrilateris, & Polygonis.

1. FIguræ terminatæ quatuor lineis rectis quatuor angulos efficientibus, appellantur *quadrilatera.*

2. Quando lineæ oppositæ sunt parallelæ, quadrilaterum appellatur *parallelogrammũ*,  *a;* si non, appellatur simpliciter *Trapezium, b.*

3. Si parallelogrammum omnes quatuor angulos rectos habuerit, dicitur *parallelogrammũ Rectangulum c*, vel brevitatis  gratia, *Rectangulum:* & si præter hæc etiam omnia latera sunt æqualia, dicitur *quadratum, d.*

4. Si omnia latera æqualia quidem sunt, anguli vero non, tunc parallelogrammum dicitur *Rhombus.*

5. Si parallelogrammum neque angulos neque latera æqualia habet, dicitur *Rhomboides, a.*

6. In omni parallelogrammo anguli oppositi sunt æquales. Sit parallelogrammum *o b c d*, dico angulum *o* esse æqualem angulo *c*: nam angulus *o* est æqualis angulo exteriori *b* (1.31.) & *b* est æqualis *c*: (1.31.) ergo etiam *o* est æqualis *c*.

7. Linea ducta ex angulo ad angulum oppositum, dicitur *Diagonalis* vel *Diameter*, ut *b d*.

8. Omne parallelogrammum dividitur bifariam, id est, in duas partes æquales, per diagonalem. Diagonalis *b d* dividit parallelogrammum *o b c d* in duo triangula *o b d* & *b c d*. Probandum igitur erit hæc duo triangula esse æqualia. 1. angulus *o* est æqualis angulo *c*. (3. 6.) 2. angulus *o b d* est æqualis ang. *c d b*: (1. 31.) & ob eandem rationem etiam angulus *o d b* est æqualis ang. *c b d*. Habent igitur hæc duo triangula omnes angulos reciproce æquales; & præterea, latus *b d* est commune utrique triangulo: E. etiam totum triangulum *o b d* est æquale toti triangulo *c d b* (2.14.)

9. In omni parallelogrammo late-

ra

ra oppoſita ſunt æqualia inter ſe, quoniam totum triangulum *o b d* eſt æquale toti triangulo *d c b* per præcedentem: Et etiam latus *c d* erit æquale lateri *b o* & latus *o d* lateri *b c*; Q. E. D.

10. Duæ diagonales *a c* & *b d* ſecant ſe mutuo in medio *e*: nam in triangulis *a e d* & *b e c*, latus *a d* eſt æquale lateri *c b* (3. 9.) angulus *e a d* eſt æqualis ang. *e c b*, (1. 31.) ob eandem rationem angulus *a d e* eſt æqualis ang. *c b e*; (1. 31.) & ulterius angulus *a e d* eſt æqualis ang. *c e b*, (1. 23.) quia ipſi ad verticem oppoſitus. E. latus *d e* eſt æquale lateri *b e* & latus *a e* lateri *c e*. (2. 14.) Sic igitur duæ diagonales ſunt diviſæ æqualiter in *e*.

11. Omnis linea recta *f g*, tranſiens per medium diagonalis *e* dividit parallelogrammum in duas æquales partes. Probandum eſt, trapezium, id eſt, quadrilaterum irregulare, *a f g d a* eſſe æquale trapezio, *c g f b c*. 1. triangulum *b e f* eſt æquale

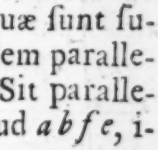
triangulo *deg*: nam latus *de* eſt æquale *eb* per hypotheſin; angulus *f* eſt æqualis angulo *g*; (1.31.) angulus in *e* utrinque eſt æqualis, quia eſt oppoſitus ad verticem &c. E. triangulum *feb* eſt æquale triangulo *ged* (2. 14.) 2. totum triangulum *adb* eſt æquale toti *cbd*. (3. 8.) Ergo ſi de triangulo *adb* auferatur parvum triangulum *feb* & per compenſationem ei iterum addatur triangulum *deg* reſultabit trapezium *afgd* æquale triangulo *adb*, medietati ſ. ſemiſſi totius parallelogrammi. Q. E. D.

12. Si in diagonali *bd* ſumatur punctum *e*, perque illud tranſeant duæ lineæ lateribus parallelæ, nim. *ge* & *hei*; reſultabunt quatuor parallelogramma, nim. *efbi*, *ehdg*; (

hæc duo appellantur *parallelogramma circa diametrum*) & reliqua duo parallelogramma *eha* & *eicg*, quæ appellantur *complementa*: duo verò complementa cum uno parallelogrammo circa diametrum efficiunt figuram, quæ vocatur *gnomon*, quale hic eſt ſpatium lineis notatum.

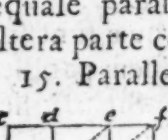
13. In omni parallelogrammo *complementa* ſunt æqualia. Probandum erit *e h a f* eſſe æquale *e g c i*. Totum triangulum *b a d* eſt æquale toti triangulo *b d c* (3.8.) Similiter triangulum *e f b* eſt æquale triangulo *e b i*, (3.8.) & etiam *e h d* eſt æquale *e g d*: (3.8.) Ergo ſi ab æqualibus triangulis *b d a*, & *b d c*, auferantur æqualia, nimirum ſi auferantur ab una parte *e f b*, & *e h d*, & ex altera parte *e i b*, & *e d g* reſtabit ab una parte parallelogrammum *e h a f* æquale parallelogrammo *e i c g*, quod reſtat ab altera parte; Q. E. D.

14. Parallelogramma quæ ſunt ſuper eadem baſi, & in iiſdem parallelis, ſunt inter ſe æqualia. Sit parallelogrammum *a b d c*, & aliud *a b f e*, ita ut baſis *a b* ſit communis utrique, & linea *c d* producta tranſeat per *e f*; ſimulque hac ratione duo parallelogramma inter duas parallelas conſtituantur, nimirum inter lineam *a b* & lineam *c f*, parallelam lineæ *a b*: Dico parallelogrammum *a b d c* eſſe æquale *a b f e*. 1. *c d* eſt æqualis *e f*, quia ſám hæc quàm illa æquales ſunt li-



neæ *a b*: (3.9.) Ergò ſi hiſce duabus lineis æqualibus addamus lineam *d e*; erit *c e* æqualis *d f*. 2 *c a* eſt æqualis *d b* (3.9.) 3. angulus *a c e* eſt æqualis angulo *b d f*: (1. 31.) Ergo totum triangulum *a e c* eſt æquale toti *b f d*. Si jam de quovis horum triangulorum æqualium auferatur triangulum album *d e o*, quod eſt inter duo parallelogramma, & cuivis illorum etiam addatur triangulum lineis contrariis notatum *o a b*; reſultabit ex hiſce ab una parte parallelogrammum *a b d c* æquale parallelogrammo *a e f b*, ab altera parte conſtituto.

15. Parallelogramma, quæ ſunt in eiſdem parallelis *a b* & *c f* & ſuper æqualibus baſibus, alterum ſuper *a b*, & alterum ſuper *g h*, ita ut *a b* æqualis ſit *g h*, ſunt æqualia. Nam ſi quis concipiat tertium parallelogrammum *a e f b*, hoc æquale erit *a b d c*, (3. 14.) quoniam eſt ſuper eadem baſi *a b*, & in iiſdem parallelis *a b* & *c f*: Et idem hoc parallelogrammum *a e f b* etiam eſt æquale *g h f e*, quia utrumque habet ean-



eandem baſim, nim. *ef* (nihil enim refert ſive baſis ſit in inferiori lineâ ſ. in ſuperiori) & ſunt in iiſd. parallelis, nim. *f e*, & *b a*. Ergo etiam *h f e g* eſt æquale *a b d c*, quia ſunt æqualia uni tertio *a e f b*.

16. Triangula ſuper eadem baſi *a b* & inter eaſdem parallelas *a b* & *c e* conſtituta ſunt æqualia. Triangulum *a b c* eſt æquale triangulo *a e b*, quia ſi quis concipiat lineam *b d* parallelam *a c* & aliam *b f* parallelam *a e*, reſultabunt duo parallelogramma *a c d b*, & *a e f b*, quæ cum ſint ſuper eadem baſi *a b* & in eiſdem parallelis, erunt æqualia. (3. 14.) Sed triangulum *a c b* eſt dimidium parallelogrammi *a c d b*, & triangulum *a e b* eſt dimidum parallelogrammi *a e f b*: (3. 8.) Ergo hæc duo triangula inter ſe ſunt æqualia.

17. Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta & in iiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. Demonſtratio eſt facilis.

18. Si triangulum cum parallelogrammo eandem baſin habuerit, in

eiſdemque fuerit parallelis, dimidium erit parallelogrammi. Triangulum *a b e* eſt dimidium parallelogrammi *a e f b*.

19. *Pentagonum* eſt figura quinque laterum & quinque angulorum. Si omnia latera ſunt æqualia, & omnes anguli æquales, pentagonum eſt *regulare*.

20. *Hexagonum* eſt figura ſex laterum & totidem angulorum; *Heptagonum* ſeptem; *Octogonum* octo &c. quæ quoque regularia ſunt, ſi omnes anguli & latera omnia inter ſe æqualia ſunt.

21. *Polygonum* in genere omnis dicitur figura, quæ pluribus comprehenſa lateribus, plures efficit angulos: ſed vocabulum hoc rarò adhibetur, niſi figuræ pluribus quam quatuor aut quinque lateribus conſtent.

22. Omne polygonum dividi poteſt in tot triangula, quod habet latera. Si intra figuram ſumatur punctum *a*, ubicunque id fuerit, & ex eo concipiantur ductæ lineæ verſus quemcunque angulum *a b*, *a c*, *a d*, &c. tot erunt triangula, quot fuerint latera polygoni.

23.

23. Anguli polygoni omnes ſimul ſumti conficiunt bis tot rectos demtis quatuor, quot ſunt latera polygoni. E. gr. ſi polygonum habet ſeptem latera, quorum duplum eſt 14. ab iiſque auferantur quatuor, reſtant decem: dico omnes angulos hujus heptagoni, nimirum angulum *c b h* una cum *b h g* & *h g f* &c. ſimul ſumtos eſſe æquales his decem angulis rectis. Nam ſi ex puncto *a* ducantur ad angulos ſeptem lineæ *a b*, *a c*, *a d* &c. ad conſtituenda ſeptem triangula, quodlibet horum triangulorum habebit tres angulos duobus rectis æquales: (2.9.) ita ut omnes anguli ſimul ſumti in ſeptem triangulis æquales ſint 14. rectis. Sed quodlibet horum triangulorum unum habet angulum circa verticem in puncto *a*; ita ut ſi omnes ponerentur circa hoc punctum, totum circuitum implerent. Ergo hi ſeptem anguli coeuntes ad punctum *a* æquales ſunt quatuor rectis, (1. 22.) & per conſequens omnes reliqui anguli, qui conficiuntur ab ipſis lateri-

bus heptagoni, æquales ſunt decem rectis; Q. E. D.

24. Polygonum etiam reſolvi poteſt in triangula, ducendo lineas ab angulo ad angulum; ſed tunc numerus laterum excedet numerum triangulorum duobus.

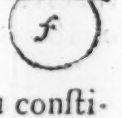
LIBER

LIBER QUARTUS.

De Circulo.

1. LInea circulum *tangere* dicitur, quæ cum circulum tangat, non tamen eum ſecet, licet producatur ultra punctum contactus. Linea *a* tangit circulum *c* prout etiam circulus *c* tangit circulum *d*: ſed in *b* linea circulum tranſit eumque ſecat.

2. Linea tranſiens per circulum, eum ſecat in duas partes, quæ appellantur *ſegmenta*, *e* eſt ſegmentum *minus*, & *f majus*; hæc linea ſecans dicitur *chorda* & partes circuli ſectæ *arcus*. Chorda cum arcu conſtituit in duobus extremis duos angulos mixtos, qui appellantur *anguli ſegmenti*, ut *e b f*.

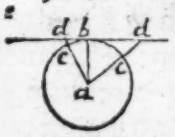


3. Si

3. Si in arcu ſegmenti *a c b* ſumatur punctum *c* ubicunque id fuerit, & concipiantur duæ lineæ *c a*, *c b*; illæ conſtituent ang. *a c b*, qui vocatur *angulus in ſegmento:* & hic ang. *a c b inſiſtere* dicitur arcui alterius ſegmenti inferioris.

4. *Sector* circuli eſt triangulum mixtum, duabus ſemidiametris *a b*, *a c*, & arcu circuli *b c*, comprehenſum. Sector hîc notatus eſt lineolis.

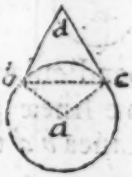
5. Si ad extremitatem ſemidiametri *a b*, concipiatur perpendicularis *b d*, illa tanget circulum in unico puncto *b*; & quodvis aliud punctum lineæ *b d* erit extra circulum ſitum. Ex. gr. punctum *d* eſt extra circulum; nam ſi concipiatur linea *a d* ducta ex centro, quæ ſecet circulum in puncto *c*, erit illa *a d* major *a b*, (2. 19.) & per conſequens major quàm *a c*, quia *a c* eſt æqualis *a b*: (1. 14.) E. punctum *d* cadit extra circulum. Q. E. D.



6. Chorda quædam *b c* dividitur bi-

bifariam per perpendicularem *a d*, per centrum *a* ductam; nam triangulum *a b c* eſt Iſoſceles quoniam *a b* eſt æquale *a c*: (1. 14.) E. perpendicularis *a d* ſecat baſin *b c* in duas partes æquales. (2. 16.) Et arcus quoque *b c* eſt diviſus bifariam.

7. Si duæ lineæ *d b* & *d c* tangant circulum, erunt æquales. Nam concipiantur à centro ad puncta contactus lineæ ductæ *a b* & *a c*, erunt hæ perpendiculares ad tangentes. (4. 5.) Ulterius, ſi concipiatur linea *b c*, angulus *a b c* erit æqualis ang. *a c b*: (2. 15.) E. ſi ab æqualibus, i. e. angulis rectis *a b d* & *a c d*, auferantur æqualia, i. e. angulus *a b c* ab una parte, & ang. *a c b* ab altera, erunt reliqui anguli æquales, i. e. *c b d* erit æqualis *b c d*, & per conſequens latus *d b* erit æquale lateri *d c* (2. 15.)

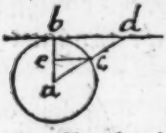


8. Duæ

8. Duæ chordæ æquales *b c*, *e f*.

constituunt duo segmenta *b d c* & *e g f* æqualia, & lineæ quoque perpendiculares *a o* & *a n* æquales erunt. Quod facile probari potest.

9. Sit semidiameter *a b*, perpendicularis *b d* & alia linea *a c d*



secans circulum in *c* & perpendicularem in *d*, nec non linea *c e* perpendicularis ad radium *a b*: omnes hæ lineæ gaudent certis nominibus. Linea *b d* terminata per *a d*, appellatur *tangens* arcus *b c*, ex. gr. 30°; linea *a d* vocatur secans e jusdem arcus 30°: linea *c e* dicitur *sinus* ejusdem arcus: & tandem *a b*, appellatur *sinus totus*, vel simpliciter radius.

10. Si in circumferentia circuli duo sumantur puncta *a* & *b* atque ab illis lineæ ducantur ad centrum *c*, & aliæ duæ ad aliud punctum *d* in circumferentia, duo consti-

ſtituentur anguli, quorum alter *a c b* vocatur *angulus ad centrum*, alter *a d b angulus ad circumferentiam.*

11. Angulus ad centrum *a c b* ſemper duplex eſt anguli ad circumferentiam *a d b.*

1. Si una linearum, ut *b d*, tranſeat per centrum *c*, angulus *a c b* erit externus reſpectu trianguli *a c d* (2. 10.) & per conſequens erit æqualis duobus angulis internis oppoſitis, nim. angulo *a d c* & ang. *d a c*: (2. 10.) Sed hi duo anguli *a d c* & *d a c* inter ſe ſunt æquales. (2. 15.) quia duo crura *c a* & *c d* ſunt æqualia: (1. 14.) Ergo angulus *a c b* eſt duplex unius horum duorum, nim. *a d c*; Q. E. D. 2. Si linea quædam *a d* vel *b d* non tranſeat per centrum *c*; concipiatur *d c e*, ita ut *e* ſit extra arcum *a b*: Tunc totus angulus *a c e* erit duplex anguli *a d e*, per caſum primum hujus propoſitionis: & ſimiliter angulus *b c e* erit duplex anguli *b d e*:

Er-

Ergo ſi de angulo *a c e* auferatur *b c e* & de angulo *a d e*, (qui eſt ſemiſſis anguli *a c e*) auferatur *b d e*, (qui etiam eſt ſemiſſis anguli *b c e*) erit reſiduum *a d b* dimidium *a c b*: quia axioma eſt, ſi quantitas eſt dupla alterius & auferatur à majori duplum illius quod aufertur à minori, quod reſiduum eſt in majori erit etiam duplum reſidui in minore: vel ſi totum totius eſt duplum, & ablatum ablati, erit & reliquum reliqui duplum. 3. Si punctum *e* cadit intra arcum *a b*, tunc angulus *a c e* erit duplex anguli *a d e* & angulus *b c e* erit etiam duplex ang. *b d e*, quod jam in primo caſu hujus propoſitionis demonſtratum erat, ergo angulus totus *a c b* eſt duplex ang. *a d b*.

12. Omnes anguli qui inſiſtunt eidem arcui *a b* ſunt inter ſe æquales, in quocunque loco circumferentiæ etiam fuerit illorum punctum verticale. Angulus *a e b* eſt æqualis angulo *a d b*, quia

quia uterque est semissis anguli *a c b*, qui est ad centrum *c*. (4. 11.)

13. Angulus ad centrum *a c e*, insistens medietati arcus *a b*, cui insistit alius angulus ad circumferentiam *a d b* est æqualis eidem angulo ad circumferentiam (4. 11.)

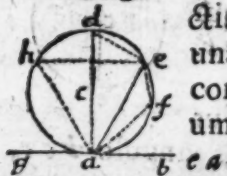
14. Angulus *a d b*, qui insistit semicircumferentiæ, est rectus; nam si *e* dividat bifariam semicircumferentiam *a e b*, angulus *a c e* erit æqualis ang. *a d b* per præcedentem. Sed *a c e* est rectus: (1. 15.) E. etiam *a d b* est rectus.

15. Angulus *a d b* in minori segmento est obtusus, quia cum arcus *a e b* sit major semicircumferentia, erit etiam arcus *b e*, qui est semissis arcus *a e b*.

^{o}
major 90. Et angulus *a d b* qui est æqualis angulo *b c e*,
^{o}
(4. 13.) erit major 90; id est, erit obtusus. 16.

16. Angulus *a d b* in majori segmento est acutus: nam est æqualis angulo *a c e*. Sed cum arcus *a e b* sit minor semicircumferentia, arcus *a e* qui est semissis *a e b*, erit minor 90. grad.

17. Si recta linea *g a b* tangat circulum in puncto *a* & alia linea *a e* secuerit eundem circulum, angulus *b a e* erit æqualis angulo in segmento opposito *a h e*: Et angulus *e a g* erit æqualis angulo in altero segmento *a f e*: Nam concipiatur perpendicularis *a d*, quæ transibit per centrum *c*, (4. 5.) angulus *a e d* erit rectus: (4. 14.) & per consequens, quia tres anguli unius trianguli sunt æquales duobus rectis, (2. 9.) angulus *e a d* unà cum angulo *a d e* constituet unum rectum. Sed idem *e a d* cum *e a b* etiam efficiunt rectum, quia *a d* est perpendicularis ad *a b*: E. angulus *e a b* est æqualis *a d e*, &



& per conſequens omni angulo, qui inſiſtit eidem arcui *ae* & punctum quodvis habet in circumferentia, ut ang. *eba*, quia omnes hi anguli inter ſe ſunt æquales; (4. 12.) Et hæc eſt prima pars hujus propoſitionis. Nunc probandum eſt angulum *eag* eſſe æqualem ang. *afe*; quæ eſt altera pars. In triangulo *aef*, angulus *afe* unà cum *fae* & *fea* eſt æqualis duobus rectis, (2. 9.) Sed angulus *fea* eſt æqualis *fab*, per jam demonſtrata in parte prima hujus propoſitionis, nam linea *fa* conſiderari poteſt ut ſecans circulum & tangentem *ba*, in quo caſu angulus *fab* debet eſſe æqualis omni angulo, qui fieri poteſt in ſegmento oppoſito *fdba*. Sed angulus *fea* eſt in hoc ſegmento, quia inſiſtit arcui *fa* & ejus punctum *e* incidit in punctum quoddam circumferentiæ *fedba*, ut ita angulus *fea* æqualis ſit ang. *fab*. Porrò duo anguli *eaf*, & *fab* unà cum *afe* ſunt æquales duobus rectis. Sed iidem *eaf*, & *fab* unà cum *eag* ſunt etiam æquales duobus rectis: (1. 20.) Ergo angulus *eag* eſt æqualis ang. *efa*; Q.E.D. 18.

18. Figura rectilinea *circa circulum describi* dicitur, cum singula latera ejus circuli peripheriam tangunt. Triangulum *a c d* circa circulum *b g f* descriptum est, quia quodlibet latus hujus trianguli tangit circulum in *b*, in *g*, in *f*.

19. Figura in *circulo inscribi* dicitur, cum singuli ejus anguli tetigerint circumferentiam, ut triangulum *a b c* in figura sequente.

20. Omne triangulum *a b c* inscribi potest circulo: nam si quis concipiat duas lineas *e i* & *e o*, quæ latera *a b* & *b c* perpendiculariter, & in medio secent, tunc ex puncto *e* tanquam centro duci possit circulus per punctum *b*. Sed dico hunc circulum quoq; transiturum per puncta *a* & *c*: nam 1. duo triangula *e i b* & *e i a* erunt æqualia, quia latus *i b* est æquale lateri *i a* per hypothesin, latus *e i* est commune, & angulus ad *i* est utrinque rectus: Ergo (2. 11.)

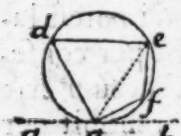
la-

latus *e b* eſt æquale lateri *e a*. 2. Ob eandem rationem probari poteſt latus *e c* eſſe æquale *e b*. Et per conſequens circulus, cujus centrum erit *e*, & ſemidiameter *e b*, tranſibit per *a* & *c*.

21. Triangulum *a c d* (fig. art. 18.) poteſt deſcribi circa circulum. Nam ſi concipiantur duæ lineæ *a e* & *d e* qui dividant bifariàm angulum *a* & *d*; Et poſtea quoque lineæ perpendiculares ad latera trianguli nim. *e b*, *e f*, *e g*, dico, ſi quis circulum ducat ex centro *e* per *b*, hunc circulum tangere tria latera trianguli in punctis *b*, *f*, *g*. Nam 1. duo triangula *a e b*, *a e f* ſunt æqualia: Habent enim latus *a e* commune, angulum ad *b* & *f* rectum, & alium angulum ad *a* æqualem, quia angulus *b a f* eſt diviſus bifariam: Ergo latus *e b* eſt æquale lateri *e f*. (2. 14.) 2. Ob eandem rationem probari poterit *e g* eſſe æquale *e f*. Et quia hæ lineæ *e b*, *e f*, *e g* ſunt perpendiculares ad latera trianguli, circulus *b f g* tanget latera in his punctis. (4. 5.)

22.

22. Omne quadrilaterum *a f e d* in circulo deſcriptum habet angulos oppoſitos ſimul ſumtos duobus rectis æquales. Nam ſi per punctum *a* ducatur tangens *g a b* & diagonalis *a e*, erit angulus *a f e* æqualis angulo *e a g*, (4. 17.) & angulus *a d e* angulo *e a b*; (4. 17.) & per conſequens quia duo *e a b* & *e a g* ſunt æquales duobus rectis, hi duo anguli oppoſiti *f* & *d* etiam æquales erunt duobus rectis. Similiter probari poterit angulos *f e d* & *f a d* fore æquales duobus rectis, ſi quis ſaltem concipiat aliam tangentem ad punctum *f*.



23. Converſa hujus propoſitionis etiam manifeſta eſt; nim. omne quadrilaterum, cujus anguli oppoſiti ſunt æquales duobus rectis inſcriptum eſſe circulo, id eſt, poſſe habere circulum qui tangat omnes illius quatuor angulos.

24. Omne polygonum circa circulum deſcriptum eſt æquale triangulo rectangulo, cujus unum crus eſt æquale ſemidiametro circuli, & alte-

terum toti circumferentiæ polygoni. Sit linea *FA* æqualis ſemidiametro *fh*, & perpendicularis infinita A B C D, &c. in qua ſumatur A *h* æquale *ah* & *h* B æquale *hb* & B *i* æquale *bi*

& *iC* æquale *ic* &c. ita ut tota A B C D E A ſit æqualis toti circumferentiæ polygoni *abcdea*. Ulterius ſit *FFF* parallela A B, ita ut omnes perpendiculares *h* F, *i* F, *k* F, &c. ſint æquales ſemidiametro *fh* vel *fi* &c. manifeſtum erit triangulum A F B eſſe æquale triangulo *afb* & triangulum B F C triangulo *bfc* & C F D, triangulo *cfd* &c. Sic omnia hæc triangula ſimul ſumta erunt æqualia toti polygono. Sed triangulum F A A eſt æquale omnibus his triangulis ſimul ſumtis, quia ſi ducantur lineæ B F, C F, D F, &c. triangulum F A B erit æquale triangulo F A B, & F B C æquale F B C &c.

(3.

(3. 16.) Ergo etiam totum triangulum F A A eſt æquale polygono ; Q. E. D.

25. Omne polygonum regulare eſt æquale triangulo rectangulo, cujus unum crus eſt tota circumferentia polygoni, & alterum, perpendicularis ducta ex centro ad latera polygoni. Demonſtratio eſt eadem cum præcedente propoſitione. Nam omnia perpendicula *f h, f i, f k*, &c. ſunt æqualia &c.

26. Omne polygonum circumſcriptum eſt majus circulo, & omne polygonum inſcriptum eſt minus illo. Quod manifeſtum eſt, quia id quod continet majus eſt eo quod continetur.

27. *Perimeter* (vel circumferentia) omnis polygoni circumſcripti major eſt circumferentia circuli, & perimeter omnis polygoni inſcripti eſt minor illa : hoc etiam manifeſtum eſt per 21. Libri ſecundi.

28. Si in minori ſegmento circuli *a b c* deſcribatur triangulum Iſoſce-

ſceles, ita ut *a b* ſit æqualis *b c*: erit triangulum illud majus dimidio ſegmenti. Nam ſi ducatur tangens *e b d*, tunc erit parallela ad *a c*, eſt enim perpendicularis ad *f b* (4. 5.) cui etiam *a c* perpendicularis eſt, (4. 6.) & præterea terminetur parallelogrammum rectangulum *a e d c*: erit hoc majus ſegmento circuli *a b c*. Sed triangulum *a b c* eſt ſemiſſis parallelogrammi *a e d c*. (3. 18.) E. triangulum *a b c* eſt majus dimidio ſegmenti *a b c*.

29. Sit tangens *a b d* & ſecans *f c b*, & recta *a c*, ut & alia tangens *c d*; dico triangulum *d b c* excedere dimidium trianguli mixti, rectis *a b*, *c b* & arcu *c a* comprehenſi: nàm cum in triangulo *d b c* angulus in *c* ſit rectus, (4. 5.) latus *d b* erit majus latere *d c* (2. 17.) ſed *d c* eſt æquale *d a*: (4. 7.) Ergo *d b* eſt majus *d a*: E. triangulum *c b d* eſt majus triangulo *c a d*: (3. 17.) E. m. majus dimidio

totius *c b a*. Sed triangulum *c b a* est majus triangulo mixto, arcu *a c*, & rectis *b c*, *b a*, comprehenso: E. m. triangulum *d b c* est majus dimidio trianguli mixti *a b c*.

30. Ex hisce duabus propositionibus sequitur, quod si multiplicata fuerint latera polygonorum regularium, exinde fieri posse circumscripta & inscripta, ita ut differentia, qua circumscriptum excedet circulum, vel qua circulus excedet inscripum, etiam pro lubitu minor reddi possit; nam si de quacunque quantitate auferatur plus quàm dimidium, & de residuo etiam plus quàm dimidium & iterum de hoc residuo plus quàm dimidium & sic aliquoties, tandem perveniemus ad residuum minimum desideratum; quod natura notum est. Sic, postquam inscriptum est triangulum, quod minus est circulo tribus magnis segmentis, adhuc inscribi potest hexagonum, quod quidem majus est triangulo; sed minus tamen est circulo sex parvorum segmentorum, quæ in adjecta figura alba sunt. Sed hæc sex parva segmenta simul sumta non

non continent tantùm ſpatium, quantum ſemiſſis trium priorum ſegmentorum (4. 28.) Et licet adhuc inſcribi poſſit dodecagonum, quod circulus excedet duodecim parvis ſegmentis; nihilominus duodecim hæc ſimul ſumta non æquivalent ſemiſſi ſex ſegmentorum hexagoni; & ſic, multiplicando latera polygoni, pro lubitu quis diminuere poteſt differentiam, qua circulus excedet polygonum inſcriptum. Similiter, poſtquam triangulum circumſcriptum eſt, adhuc circumſcribi poteſt hexagonum, poſtea dodecagonum, & figura viginti quatuor laterum &c.

31. Omnis circulus eſt æqualis triangulo rectangulo, cujus unum crus (ex. gr. perpendiculum) eſt ſemidiameter, & alterum (ex. gr. baſis) eſt linea recta, æqualis circumferentiæ circuli. Nam triangulum hoc erit majus quovis polygono inſcripto, & minus quovis polygono circumſcripto: (per 24. 25. 26. & 27. lib. 4.) E. erit æqualis circulo. Nam ſi eſſet

majus, tunc licet minima esset differentia, adhuc tamen construi posset polygonum circumscriptum, cujus differentia à circulo minor esset, differentiâ ejusdem circuli & trianguli rectanguli: & sic polygonum circumscriptum esset hoc triangulo minus, quod absurdum est. Similiter, si triangulum hoc esset minus circulo, construi adhuc posset polygonum inscriptum, quod majus esset hoc triangulo; quod est impossibile.

Hoc genus demonstrationis, quod nunc adhibemus & per impossibile *appellatur, inter pulcherrima veterum inventa numeratur; tota quippe Geometria* indivisibilium *in eo fundatur: ita ut mirari necessum habeamus, quosdam recentiorum autorum eam rejecisse tanquam mancam & indirectam. Quod si verò quispiam tam delicati fuerit ingenii, ut nullam demonstrationem perferre possit, quæ non concludat directe & positive, tunc facile erit eam convertere in regularem & directam: Nam saltem id pro principio ponere debemus, quod* si duæ quantitates determinatæ *a* & *b* tales fuerint,

ut

ut quævis alia quantitas conceptibilis, quæ major vel minor esset quàm *b*, etiam major vel minor esset quàm *a*, tunc duæ quantitates *a* & *b* erunt æquales. *Posito hoc principio, quod revera ex se manifestum est, probari poterit directe triangulum illud esse æquale circulo, quoniam quævis figura, quæ saltem concipi potest (inscripta) minor circulo, etiam minor est triangulo; & quævis figura (circumscripta) major circulo, etiam major est triangulo.*

Hoc est, quod quadraturam circuli *appellant, quæ consistit in eo, ut constituatur quadratum vel triangulum vel quævis figura rectilinea æqualis circulo; quod fieret, si inveniri posset linea recta æqualis circumferentiæ, ceu videre est in ipsa propositione; sed hæc æqualitas nunquam inventa est Geometricè.*

32. Linea disposita circulariter, plus spatii continebit, quam quævis alia figura polygona regularis, quæcunque etiam illa fuerit. Si circumferentia circuli *a b c d* disponeretur in formam quadrati vel alterius po-

lygoni regularis, ita ut omnia latera

e g, g h, h i, i e, simul ſumpta æqualia ſint circumferentiæ *a b c d*; dico circulum eſſe majorem polygono. Nam circulus eſt æqualis triangulo, cujus unum latus eſt circumferentia, & alterum ſemidiameter *f a*: polygonum v. eſt æquale triangulo, cujus unum latus etiam eſt eadem circumferentia *a b c d* (vel latera *e g h i*) & alterum latus *f o* (4. 25) Et quemadmodum *f o* minus eſt quàm *f a*, ſic totum triangulum ſecundum æquale polygono, erit minus primo triangulo, quod æquale eſt circulo: & per conſequens polygonum hoc erit minus circulo; Q. E. D.

Hoc eſt quod volunt, quando communiter dicunt, inter omnes figuras Iſoperimetras, *vel quæ habent æqua circumferentias, maximam eſſe circulum.*

LIBER

LIBER QUINTUS.

De Solidis.

1. LInea recta eſt ſimpliciter *recta* ad planum, vel *erecta* in plano *ad angulos rectos*, quando neque in hanc neque in illam partem eſt magis inclinata, ut columna in pavimento.

2. Duo plana ſunt parallela, quando omnes perpendiculares vel rectæ, inter plana ductæ, æquales ſunt.

3. Planum eſt perpendiculare vel *rectum* ad aliud planum, quando neque in hanc neque in illam partem eſt magis inclinatum, ut murus in ſolo.

4. *Angulus ſolidus* oritur, quando tria vel plura plana ſe contingunt in uno puncto, ut punctum adamantis bene præparati.

5. Si concipiatur linea *a b* fixa in puncto *a* & poſtea mota ſecundum longitudinem laterum polygoni *b c d*, deſcribet ea per motum hanc figu-

figuram, quæ appellatur *Pyramis.*

6. Polygonum appellatur *baſis* pyramidis.

7. Si linea *a b* moveatur ſecundum longitudinem circuli *b c d*, deſcribit *conum*, cujus *baſis* eſt hic circulus; & linea ducta à vertice ad centrum circuli *e*, eſt *axis.*

8. Si linea *a b* moveatur uniformiter circa duo polygona *b c d*, *a f g*, quæ ſint ſecundum latera & angulos mutuo & in totum æqualia, ut & parallela, ita ut latera æqualia ſibi reſpondeant parallela, *a f*, *b c*, *f g*, *c d* &c. tunc hæc linea per motum producet figuram, quæ dicitur *Priſma*: ejus polygona ſunt *baſes.*

9. Si baſes priſmatū ſunt parallelogramma, appellatur *Parallelopipedum.*

10. Si linea *a b* moveatur uniformiter circa duos circulos æquales & parallelos, deſcribit *Cylindrum.*

11. Li-

11. Linea quæ jungit centra *e e* baſium eſt *axis* cylindri.

12. In omnibus his figuris, quando axis eſt perpendicularis ad baſin *d e c*, illæ appellantur Iſoſceles; Si verò axis eſt inclinata, ſunt ſcalenæ.

13. Si ſemicirculus *a d b* revolvatur circa ſuam diametrum, deſcribit *ſphæram* vel globum, cujus *axis* eſt *a b*; *centrum* *c* idem eſt cum centro ſemicirculi. Omnis linea ducta per centrum *c* & utrinque terminata per ſuperficiem ſphæræ, appellatur *Diameter* & dici poteſt *axis*.

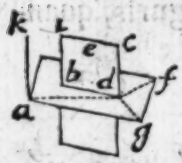
14. Omnes lineæ ductæ à centro *c* ad circumferentiam, dicuntur *radii*, & ſunt inter ſe æquales.

15. Duæ lineæ rectæ, quæ ſe mutuo ſecant, ſunt in eodem plano, & per conſequens omne triangulum etiam eſt in uno plano.

16. Si duo plana *e db*, & *d ab* ſe mutuo ſecent, id fiet in linea recta

d b, quæ appellatur *communis sectio.*

17. Si linea *c d* est perpendicularis ad duas lineas *f d* & *g d*, in plano *f g d* existentibus, illa etiam erit perpendicularis ad planum.



18. Si linea *c d* est perpendicularis ad tres *f d*, *g d*, *a d*, hæ tres lineæ sunt in uno plano.

19. Si duæ lineæ *d c*, *b i* sunt perpendiculares ad idem planum *f d b*, erunt illæ parallelæ.

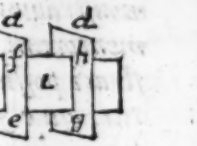
20. Si duæ lineæ *d c*, *b i* sint parallelæ, & ducatur quævis alia linea recta à quovis puncto unius lineæ ad alteram, ut *d b*, hæ tres lineæ erunt in eodem plano.

21. Si duæ lineæ *d c*, *b i* sint parallelæ tertiæ *a k*, licet illæ cum hac non existant in eodem plano, inter se tamen parallelæ sunt.

22. Si una atque eadem linea *a b* est perpendicularis ad duo plana *c d*, *e f*, tunc hæc sunt parallela.

23. Si duo plana parallela *d b g*, *a f e*,

a f e secentur per planum aliquod tertium *i*, communes illorum sectiones *h g*, *f e*, sunt parallelæ.



24. Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur; ex his duo quilibet, utut assumti, tertio sunt majores.

Omnes hæ propositiones tam manifestæ sunt, ut adhibita exigua attentione non necessum sit pluribus eas probare.

25. Omnes anguli plani, qui angulum solidum constituunt, simul sumti sunt minores quatuor rectis. Nam si facerent quatuor rectos, non constituerent angulum solidum, sed planum. Ergo ut angulus solidus fieri possit, oportet angulos quatuor rectis minores esse.

Suasor essem, ut anguli & figuræ ex charta construerentur, & hac ratione omnia facile comprehendi possent.

26. In omni parallelopipedo plana opposita sunt æqualia: quod facile concipi potest.

Octo sequentes demonstrationes demon-

monſtrabuntur in ſecunda parte elementorum. Nihilominus & hic demonſtrari poſſint, ſi ſolidis ſaltem applicentur, quæ jam probata ſunt de planis lib. 3. & 4. ſed non opus eſt hiſce diu inhærere.

27. Parallelopipeda baſibus æqualibus & planis parallelis contenta ſunt æqualia (vid. 3.14.)

28. Omne parallelopipedum ſecatur in duo priſmata triangularia æqualia ab ipſo plano per duas diametros parallelas adverſorum planorum.

29. Priſmata triangularia ſuper æqualibus baſibus & inter eaſdem parallelas conſtituta, ſunt æqualia.

30. Pyramides in baſibus æqualibus, & in eiſdem parallelis conſtitutæ, ſunt æquales.

31. In genere omnia priſmata, cylindri, coni, in baſibus æqualibus & in eiſdem parallelis conſtituti ſunt æquales.

32. Pyramides & coni, qui habent baſes æquales baſibus priſmatum & cylindrorum, & ſunt in eiſdem parallelis, erunt tertia pars priſmatum vel cylindrorum.

33.

33. Omnis ſphæra eſt æqualis cono, cujus axis perpendicularis eſt ſemidiameter ſphæræ, & baſis planum æquale toti ſuperficiei convexæ ejuſdem ſphæræ.

34. Inter omnes figuras ſolidas, quæ eadem ſuperficie terminari poſſint, maxima eſt ſphærica.

35. Corpus *regulare* eſt, quod continetur figuris regularibus & æqualibus, gaudetque angulis ſolidis æqualibus, ut ſunt.

36. *Tetraedrum* eſt contentum quatuor triangulis æqualibus & æquilateris, tale eſt pyramis, cujus baſis eſt æqualis cuivis faciei ſeu lateri.

37. *Hexaedrum* ſeu *Cubus* conſtat ſex quadratis æqualibus, prout ſunt illi quibus ludimus.

38. *Octaedrum* eſt ſub octo triangulis æqualibus & æquilateris.

39. *Dodecaedrum* eſt ſub duodecim pentagonis æqualibus & æquilateris contentum.

40. *Icoſaedrum* conſtat viginti triangulis æqualibus & æquilateris.

41. Ultra hæc quinque corpora regularia, impoſſibile eſt plura alia in-

invenire; quod ita demonſtratur:

Sumantur triangula æquilatera, quæ ſunt inter figuras rectilineas ſimpliciſſima. Ad minimum tria requiruntur ad conſtituendum angulum ſolidum; ſed his tribus conjunctis perfectum oritur tetraedrum: nam hæc triangula in unum punctum coeuntia, relinquunt baſin triangularem ſimilem & æqualem lateribus, ceu videre eſt ex compoſitione.

Junctis quatuor ejuſmodi triangulis oritur angulus Octaedri. Ex quinque talibus triangulis reſultat angulus Icoſaedri.

Sex triangula ſimul juncta non poſſunt conſtituere angulum ſolidum, ſunt enim æqualia quatuor rectis: Sed omnis angulus ſolidus conſtat angulis planis, qui ſimul ſumti minores eſſe debent quatuor rectis: (5.25.) ſic igitur impoſſibile eſt per triangula, alia corpora regularia conficere, præter illa tria.

Si jam aſſumamus quadrata, & tria ſimul jungamus, habebimus cubum; & non poteſt aliud corpus præter cubum per quadrata conſtituti, quia

si assumerentur quatuor quadrata & conjungerentur, non efficerent angulum solidum, sed tantùm planum. (5. 25.)

Si sumantur tria pentagona, resultabit angulus dodecaedri: sed quatuor pentagona non possunt constituere angulum solidum.

Tandem tria hexagona simul juncta, cum efficiant quatuor angulos rectos, angulum solidum constituere non possunt; & tria heptagona vel aliæ figuræ plurium laterum id multò minus præstare possunt: Sic igitur non possunt plura præter hæc quinque corpora regularia construi, tria cum triangulis, unum per quadrata, & unum per pentagona.

LIBER SEXTUS.

De Proportionibus.

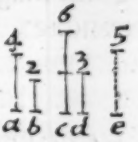
1. QUando loquimur *de magnitudine* item quantitate *magna*, ſemper comparatio inſtituitur inter hanc quantitatem & aliam ejuſdem naturæ, reſpectu cujus illa *magna* dicitur: Sic dicimus montem eſſe parvum, adamantem eſſe magnum, quia comparamus hunc montem cum aliis in quorum comparatione *minor* eſt; & ſimiliter comparamus hunc adamantem cum aliis, in quorum comparatione hic eſt major.

2. Quando hac ratione conſideratur quantitas, ut inveſtigetur quantam *magnitudinem* illa habeat in comparatione ad aliam; tunc magnitudo quæ datur in comparatione ad aliam, appellatur *ratio*, vel ſi rem melius exprimere velimus *comparatio*.

3. Quantitas quæ refertur ad aliam dicitur *antecedens*, ea verò ad quam

quam alia refertur, *consequens.*

4. Sumantur quatuor quantitates & comparentur binæ & binæ *a* 4. cum *b* 2. & *c* 6. cum *d* 3. Si reperiatur *a* habere tantam *magnitudinem* in comparatione ad *b*, quam *c* in comparatione ad *d*: tunc dicuntur hæ rationes æquales; i. e ratio *a* ad *b* est æqualis rationi *c* ad *d*; Et ut *a* habet duplo majorem quantitatem quam *b*; sic etiam *c* duplo majorem habebit quam *d*.



5. Sed si reperiatur *a* 4. habere majorem quantitatem in comparatione ad *d* 2, quam *c* 6 in comparatione ad *e* 5. Ex. gr. Si reperiatur *a* 4. habere duplo majorem quantitatem quam *b* 2. *c* 6. verò non habere duplam in ordine ad *e* 5. tunc dicuntur hæ rationes inæquales, & *a* habet *majorem rationem* ad *b* quam *c* ad *e*; ita ut *habere majorem rationem* nihil aliud sit quam habere majorem quantitatem in comparatione ad secundam quantitatem, quam tertia non habet in comparatione ad quartam.

6. Æqualitas rationum appellatur *pro-*

proportio; & quando dantur quatuor quantitates, quarum prima habet tantam magnitudinem in ordine ad ſecundam, quantam tertia habet ad quartam, tunc hæ quatuor quantitates vocantur *proportionales.*

Ut melius intelligamus totum myſterium proportionum, quæ inter difficillima Geometriæ referuntur, prout etiam revera ſunt altioris indaginis; illas explicabo aliquo exemplo, quod ſolum meo quidem judicio rem intellectu facilem reddet, quæ tamen aliàs ſatis intricata videtur.

7. Concipiatur circulus *b A d* per motum lineæ *a b* circa punctum *a* deſcriptus; & ſimiliter ſit circulus *c A e* per motum puncti *c*, quod eſt in linea *a c b*, deſcriptus; Concipiatur denuo eandem lineam *a c b* adhuc alia vice moveri uſque ad *a e d*; arcus *b B d*, appelletur *B*; arcus *c D e* appelletur *D*; totus circulus *b B A* nominetur *A*; totus circulus *c D a* vocetur *A*. Jam ſi comparemus ab una parte totum circulum *A* ad ar-

arcum *B*; & ab altera parte totum circulum *A* ad arcum *D*, manifestè apparebit circulum *A*, habere tantam magnitudinem in ordine ad arcum *B*, quantam circulus *A* habet in ordine ad arcum *D*; & si *B* est quarta vel 6ta pars circuli *A*, *D* etiam erit quarta vel sexta pars circuli *A*: quod hac ratione effertur, *ut se habet* A *ad* B, *sic se habet* A *ad* D, & brevitatis gratia nos sic notabimus *A. B :: A. D.*

8. Si jam rationem invertimus comparando *B* ad *A* & *D* ad *A* etiam manifestè videbimus, quod *B. A :: D. A.* ita ut supposito *A. B :: A. D*, subitò conclusionem inferre possimus *invertendo*: Ergo *B. A :: D. A.*

9. Si instituamus alternationem comparando antecedens cum alio antecedente, & similiter consequens cum alio consequente, concludemus *alternando*, Ergo *A. A :: B. D.* & hoc manifestum est: nam si totus circulus *A* est duplum vel triplum (vel quæcunque alia ratio sit) circuli *A*, arcus *B* etiam erit duplum vel triplum (vel alia quævis ratio) arcus *D*. Hoc manifestum esse dico, quia

duo

duo circuli *A* & *A* descripti sunt per motum lineæ *a c b*, ita ut dum *b* describit totum circulum *A*, interea *c* describat totum circulum *A*, & dum *b* describit arcum *B*, interea *c* etiam describat arcum *D* & hoc per unum communem motum circularem; nisi quod punctum *c*, dum tardius movetur quam punctum *b* etiam minorem circulum in proportione ad tarditatem describat: Et similiter dum punctum *b* absolvit arcum *B*, punctum *c* pari modo describit arcum *D*, qui erit minor in proportione tarditatis suæ.

10. Si comparemus differentias antecedentium & consequentium cum ipsis consequentibus; Ex. gr.

A minus *B*, cum *B*, & *A* minus *D*, cum *D*, videbimus etiam hic dari proportionem & *A* minus *B*. *B*:: *A* minus *D*. *D*; nam manifestum est arcum *b A d* (qui est *A* minus *B*) se habere ad arcum *B*, ut arcus *c A e*, (qui est *A* minus *D*) se habet ad arcum *D*: Et hoc dicitur fieri *dividendo*.

11. Si

11. Si conjungimus antecedentia & consequentia atque ea comparamus cum consequentibus habebimus *A* plus *B*. *B* :: *A* plus *D*. *D*; quod dicitur fieri *componendo*.

12. Si concludimus *A*. *A* minus *B* :: *A*. *A* minus *D*, hoc dicetur fieri *convertendo*.

13. Si sumantur plures quantitates quæ sint proportionales binæ ac binæ *B*. *f* :: *D*. *i* & *f*. *g* :: *i*. *n* & c. tunc possumus concludere sumendo primas & ultimas, *B*. *g* :: *D n*; & dicetur ratio ex *æquo ordinata*.

Propositio quæ sequitur paulò intricata est, sed non est magni momenti & omitti potest.

14. Sed postquam sumsimus *f*. *g* :: *o*. *D*, id est, ut se habet penultima ad ultimam in primo ordine: sic alia quædam quantitas *o* se habet ad primam secundi ordinis, tunc concluditur: Ergo *B*. *g* :: *o*. *i*, id est, ut prima ad ultimam in primo ordine: sic hæc alia quantitas *o* ad penultimam secun-

cundi ordinis: & hæc comparatio appellatur *ex æquo perturbata.* Verum hoc ſemper concludi poteſt: nam quia *f. g* vel *i. n* :: *o. D* etiam erit *alternando* & *invertendo o. i* :: *D. n* vel :: *B. g.*

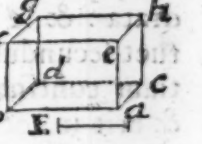
15. Si ſumatur *B* tam multiplex quam *D*, ex. gr. 3 *B.* & 3*D.* concludemus *B. D* :: 3*B.* 3*D.* Et ſimiliter :: 10 *B.* ad 10 *D.* vel etiam :: $12\frac{1}{2}$ *B.* ad $12\frac{1}{2}$ *D;* Et ſic quacunque ratione multiplicentur hæ duæ magnitudines *B* & *D.* ſi modo æqualiter multiplicentur, tunc ſemper prodibit eadem ratio inter magnitudines æqualiter multiplicatas & magnitudines ſimplices. Magnitudines æqnaliter multiplicatæ appellantur *æque multiplices* ſimplicium *B* & *D*, & *æque multiplices* inter ſe eſſe dicuntur ut ſimplices.

16. Si dividatur *B* eadem ratione ac *D* & ſumatur ex. gr. pars quarta de *B*, & quarta pars de *D*, vel etiam decima à *B* vel decima à *D*, vel alia quævis pars; Hæ partes habebunt ean-

eandem rationem inter se ac tota. $B.D :: \frac{1}{4}B.\frac{1}{4}D :: \frac{1}{10}B.\frac{1}{10}D$. &c. Hæc omnia naturâ nota sunt.

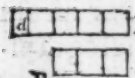
17. *Multiplicare* lineam per aliam lineam, est producere parallelogrammum rectangulū quod pro duobus lateribus contiguis has duas lineas habet. Ex. gr. multiplicetur linea *A* per lineam *B*, & fiat rectangulum *abcd*, ita ut *ab* vel *cd* sit æqualis *A*, & *bd* vel *ac* sit æqualis *B*.

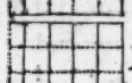
18. Multiplicare rectangulū vel aliam superficiem per lineam, est nihil aliud quàm producere parallelopipedū (5.9.) cujus basis est hæc superficies & altitudo perpendicularis hæc linea. Ex. gr. multiplicetur superficies *abdc* per lineam *E*, & fiat solidum *abfgh* &c. ita ut basis illius sit superficies *ad*, & altitudo *ac* vel *bf* æqualis E.



19. Ut has multiplicationes bene concipere possimus, necesse est ima-

imaginari duas lineas, ac si haberent latitudinem atque earundem totam longitudinem dividere in parva quadrata, ceu vides in his figuris, ubi *A* est linea, vel potius regula constans tribus parvis quadratis, & *B* est alia regula constans quatuor parvis quadratis ejusdem latitudinis cum tribus quadratis regulæ *A*. Jam igitur multiplicare *A* per *B*, vel *B* per *A*, est nihil aliud, quàm sumere regulam *B* toties, ac sunt quadrata in *A*, vel etiam sumere *A* toties, quot sunt quadrata in *B*: quod ad idem recidit. Sic *B* sumtum ter efficit primum rectangulum, quod continebit duodecim quadrata: & *A* sumtum quater constituet secundum rectangulum, quod etiam continebit duodecim quadrata, & erit in totum æquale primo.

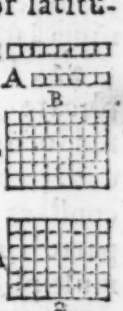




20. Notandum est, eandem multiplicationem nihilominus fieri, etiam si in longitudine lineæ non exactè inveniatur certus numerus parvorum quadratorum; ut si in *A*, ex. gr. essent

essent tria quadrata & in *B* quatuor & dimidium, vel quatuor, & alia pars aut excessus quicunque, hîc notatus per *d*; tunc *B* ter saltim sumitur, ut multiplicatio fiat *B* per *A*, & compositum erit primum rectangulum duodecim quadratorum & trium excessum ceu particularum *d*. Similiter multiplicando *A* per *B*, id est, sumendo *A* quater cum dimidio, vel quater cum tali excessu *d*, resultabit secundum rectangulum etiam constans duodecim quadratis & tribus *d*.

21. Si concipiamus lineam *B* ad dimidium se contrahere, ita ut, manente longitudine semper eadem, postea habeat octo parva quadrata, (id est, longitudo sit octies major latitudine,) etiam sequetur, si eadem ratione se contrahat latitudo *A*, dari in illa sex parva quadrata: ita ut si nunc multiplicetur *B* per *A*, vel *A* per *B*, orientur duo rectangula in totum æqualia duobus prioribus. Nam *B* sumta sexies facit primum rectangu-



lum conſtans 48. quadratis; & A ſumta octies facit ſecundum rectangulum etiam conſtans 48. quadratis; & hæc 48. quadrata nec plus nec minus valent quam duodecim illa præcedentis rectanguli, quia unum horum duodecim reſpondet quatuor ex 48, ceu in figura videre eſt, ſic quæcunque tandem latitudo etiam minima hiſce lineis detur, eas in infinitum contrahendo, manifeſtum erit, rectangula quæ per multiplicationem ab illis producuntur ſemper eſſe eadem. Hinc audacter lineæ ut indiviſibiles aſſumi & inter ſe multiplicari poſſunt, cū ex illis rectangulū efficiendū eſt, quia nunquam magnitudo hujus rectanguli variatur, licet vel minima latitudo lineis relinquatur.

22. Facillimum eſt omnia hæc applicare multiplicationi ſolidorum: ſed loco quadratorum, concipi debent cubi: nam ſi concipiatur ſuperficies conſtans duodecim cubis, & ex altera parte linea conſtans duobus cubis, multiplicari poterit ſuperficies duodecim cuborum per lineam duorum ſumendo eandem ſuperficiem toties, quot

quot ſunt parvi cubi in linea, id eſt, bis, & tunc reſultabit ſolidum conſtans viginti quatuor parvis cubis.

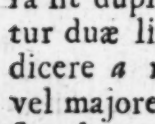
23. Ex his omnibus apparet hæc parva quadrata & cubos in multiplicatione linearum & ſuperficierum, reſpondere unitatibus in multiplicatione numerorum: nam multiplicare numerum per alium, ex. gr. 3 per 5, nihil aliud eſt, quam ſumere 3 toties, quot ſunt unitates in 5, vel ſumere 5 toties, quot ſunt unitates in 3. & productum erit 15. Sicut multiplicare lineam per aliam, eſt ſumere alteram illorum toties quot ſunt quadrata in altera; & multiplicare ſuperficiem per lineam, eſt ſumere ſuperficiem toties quot ſunt cubi in linea.

Alio in loco ſermo erit de multiplicatione ſuperficierum per ſuperficies, vel per ſolida, ex qua reſultant compoſita, quæ appellantur plurium quàm trium dimenſionum.

24. Omnes magnitudines exprimi poſſunt lineis: ut ſi magnitudo quædam dupla eſt vel tripla alterius, vel

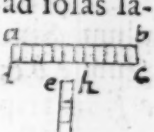
in quacunque alia ratione, ſaltim ſumantur duæ lineæ, quarum altera dupla ſit vel tripla alterius, vel in quacunque alia ratione ſimili cum ratione magnitudinum. Sic ad expemenda duo tempora, ex. gr. horam & duas horas; vel m. duas acceleraciones ſive velocitates, quarum altera ſit dupla alterius, ſaltim ſumantur duæ lineæ *a* dupla *b*, & poteris dicere *a* repræſentare duas horas, vel majorem accleracionem, & *b* reſpondere uni horæ vel minori acclerationi, & cum illis lineis agere ac cum ipſis horis &c.

25. Ad cognoſcendam proportionem rectangulorum, neceſſum eſt ſcire rationem longitudinis unius ad longitudinem alterius, & præterea rationem latitudinis unius ad latitudinem alterius, ex. gr. ad cognoſcendam rationem rectanguli *a c* ad



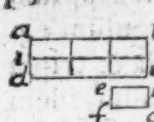
rectangulum *e g*, non ſufficit ſcire longitudinem *a b* eſſe triplam long. *e h*, ſed præterea ſcire debemus *a d* eſſe duplam *e f*: nam ſi ſumatur *a i* æquali

qualis *e f*, rectangulum *b i* erit triplum rectanguli *e g*, quia *a b* eſt tripla *e h* & *a i* æqualis *e f*. Et ulterius, quemadmodum *i d* etiam eſt æqualis *a i*, vel *e f*, (quia ſupponitur *a d* eſſe dupla *a i* vel *e f*,) rectangulum *i c* etiam erit triplum rectanguli *e g*. Sic totum rectangulum *a c* eſt bis triplum rectanguli *e g*, id eſt ſextuplum ſive continet ſexies rectangulum *e g*. Quod dico de ratione dupla & tripla latitudinum & longitudinum, idem quoque intelligi debet de quævis alia ratione: nam ſi *a b* eſt quadrupla *e h* & *a d* tripla *e f*, rectangulum *a c* erit ter quadruplum rectanguli *e g*, id eſt, duodecuplum ipſius *e g*, vel continebit illud duodecies. Sed ſi *a b* eſt duodecupla *e h*, & *e f* tripla *a d*; tunc fiet certa compenſatio. Nam ſi reſpectus ſaltim habeatur ad ſolas latitudines *a b* & *e h*, rectangulum *a c* illud ſuperat & duodecies æquat; ab altera parte nihilominus amittit hunc exceſſum in altitudinibus *a d* & *e f*, dum rectangulum *e g* alterum æquare debet tribus vicibus.



bus. Si jam comparemus exceſſum & defectum, cum rectangulum *a c* ſit ab una parte duodecies majus, & ab altera parte tribus vicibus minus, reſtat illud tantum eſſe quatuor vicibus majus *e g*.

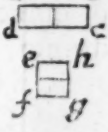
26. Hoc intelligimus, quando dicimus rectangula eſſe in *ratione compoſita* laterum: nam ſi *a b* eſt tripla *e h* & *a d* dupla *e f*, rectangulum *a c* habebit rationem compoſitam tripli & dupli ad rectangulum *e g*, id eſt, erit bis triplum, vel ter duplum, vel uno verbo ſextuplum. Similiter ſi *a b* eſt quadrupla *e h*, & *a d* tripla *e f*, rectangulum *a c* habebit rationem compoſitam quadrupli & tripli ad rectangulum *e g*, id eſt, erit ter quadruplum, vel quater triplum, vel uno verbo duodecuplum. Similiter ſi *a b* eſt duodecuplum *e h*, & *a d* ſubtriplum *e f* (id eſt, *e f* ſit triplum *a d*) ratio rectanguli *a c* ad rectangulum *e g* erit compoſita ex ratione duodecupla & ratione ſubtripla, i. e. *a c* erit duodecies ſubtriplum, vel vice verſa, vel uno verbo quadruplum *e g*.



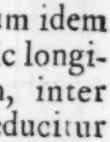
Si

Si tertia pars thaleri duodecies ſumatur, reſultant quatuor thaleri; ita ut quatuor thaleri ſint duodecies ſubtriplum thaleri, i. e. faciunt duodecies tertiam partem thaleri.

27. Exinde apparet, ſi latera duorum rectangulorum ſunt reciproce proportionalia, rectangula eſſe æqualia: nam ſi *a b* eſt dupla *e h*, ſit vero reciproce *h g* dupla *b c*, vel etiam ſi *a b* eſt tripla *e h*, & *h g* tripla *b c*, vel quamcunque tandem rationem habuerit *a b* ad *e h*, eandem etiam habeat *h g* ad *b c*, manifeſtum erit, quantum rectangulum *a c* excedit alterum in longitudine, tantum idem excedi in latitudine. Dum ſic longitudo compenſat latitudinem, inter ſe ſunt æqualia. Exinde deducitur hæc propoſitio maximi momenti.

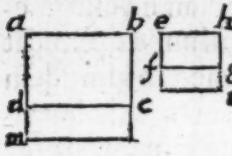


28. Si ſunt quatuor magnitudines proportionales, id quod provenit ex multiplicatione duarum mediarum, ſemper æquale eſt ei, quod producitur ex multiplicatione duorum extremorum; ut ſi *a b. e h* :: *h g*,



hg. bc, dico, ex multiplicatione *ab* & *bc* oriri rectangulum *ac*, & ex multiplicatione mediarum *eh* & *hg* oriri rectangulum *eg*, & hæc duo rectangula *ac* & *eg* esse æqualia. (6. 27.) Quod fit per lineas & rectangula, fieri potest per quamcunque aliam magnitudinem, quia omnes magnitudines possunt exprimi per lineas, & omnes multiplicationes magnitudinum per multiplicationes linearum, i. e. per rectangula. (6.24.)

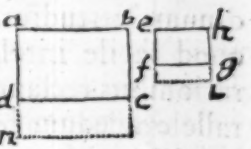
29. Quando rectangula habent latera proportionalia, ita ut *ab. eh :: ad. ef*, tunc dicitur rectangulum *ac* esse in *ratione duplicatâ* laterum ad rectangulum *eg*: nam ratio *ac* ad *eg* est composita ex ratione *ab* ad *eh*, & ex ratione *ad* ad *ef*. (6. 26.) Sed ratio *ab* ad *eh* hic est (per hypothesin) eadem cum ratione *ad* ad *ef*: Et sic ut habeamus rationem rectanguli *ac* ad rectangulum *eg*, sufficit bis sumere rationem *ab* ad *eh*. Ex. gr. Si, *ab* est dupla *eh*, & *ad* est dupla *ef*, rectangulum *ac* erit



erit bis duplum, i. e. quadruplum rectanguli *eg*. Et ſi *ab* eſt tripla *eh*,& *ad* tripla *ef*; erit *ac* ter triplum *eg*, id eſt, nonecuplum: Et ſi *ab* eſt quadruplum *eh*, erit *ac* quater quatruplum i. e. ſextecuplum *eg*.

30. Si ſumatur tertia quædam proportionalis *no*, ita ut *ab. eh :: eh. no*, duo rectangula *ac* & *eg* erunt ut lineæ *ab* & *no*. Nam *ab* ad *no* eſt in ratione duplicata *ab* ad *eh*. Et ſi *ab* eſt dupla vel tripla, vel quadrupla *eh*, erit *ab* bis duplnm, vel ter triplum, vel quater quadruplum *no*.

31. Rectangula illa, quæ hac ratione latera proportionalia habent. *ab. eh :: ad. ef*, appellantur *ſimilia*: quorum latera *homologa* ſunt illa, quæ in proportione ſibi reſpondent, ut *ab* & *eh* vel etiam *ad* & *ef*: nā ſi *ab* eſt latus maximum rectanguli *ac*, erit etiam *eh* latus maximum rectanguli *eg*.



32. Omnia quadrata ſunt rectangula ſimilia: nam manifeſtum eſt, ſi

a b eſt dupla vel tripla *e h*; erit etiam *a m* dupla vel tripla *h i*, quia *a m* eſt æqualis *a b* & *h i* æqualis *e h*.

33. Rectangula ſimilia inter ſe ſunt, ut quadrata ſuper illorum latera homologa conſtituta. Dico rectangulum *a c* eſſe ad rectangulum *e g*, ut quadratum *b m* ad quadratum *e i*: nam tam quadrata quàm rectangula, ſunt inter ſe in ratione duplicata *a b* ad *e h*. (6.29.31.)

34. Ad cognoſcendam rationem duorum ſolidorum parallelopipedorum rectangulorum, neceſſum eſt ſcire rationem baſeos unius ad baſin alterius, & præterea rationem altitudinis unius ad altitudinem alterius: quia ratio unius ſolidi ad aliud compoſita eſt ex rationibus longitudinum, latitudiuum, & altitudinum; quod facile intelligitur ex dictis de rationibus rectangulorum. Nam ſi parallelopipedum baſin habet duplam baſeos alterius parallelopipedi, & altitudinem triplam altitudinis, primum erit bis triplum, vel ter duplum, vel uno verbo ſextuplum alterius.

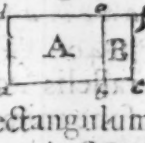
35. Si

35. Si baſes duorum parallelopipedorum reciproce ſunt ut illorum altitudines, parallelopipeda ſunt æqualia. Hoc probatur ut vigeſima ſeptima hujus libri: nam quantum unum excedit alterum in latitudine & longitudine, tantum exceditur in altitudine.

36. Quando parallelopipeda rectangula habent omnia latera proportionalia, appellantur *ſimilia* & ſunt *in ratione triplicata* ſuorum laterum, ut diximus de parallelogrammis eſſe *in ratione duplicata*.

37. Parallelopipeda rectangula ſimiliter inter ſe ſunt ut cubi, ſuper latera homologa conſtituti: nam tam cubi quàm parallelopipeda ſunt inter ſe in ratione triplicata laterum homologorum.

38. Rectangula quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe ut baſes illorum. Sint rectangula *A* & *B* inter parallelas *df* & *ac* conſtituta, ita ut *ad* æqualis ſit *cf*: dico *A. B :: ab. bc*, id eſt, rectangulum *A* eſſe ad rectangulum *B*, ut baſis *ab*



ſe

ſe habet ad baſin *bc*. Ut ſi, ex. gr. *ab* eſt dupla *bc*, *A* etiam erit duplum *B*; & ſi *ab* ſit tripla, vel quadrupla *bc*; erit etiam *A* triplum vel quadruplum *B*: nam *A* nihil aliud eſt quam linea *ab* multiplicata per lineam *ad* (6.17.) & *B* nihil aliud eſt, quàm linea *bc*, multiplicata per eand. *ad* vel *eb* ipſi æqualem. E. (6.15.) *A. B :: b. bc.*

39. Omnia parallelogramma, quæ ſunt in eiſdem parallelis, ſunt inter

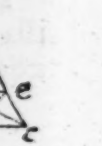
ſe ut illorum baſes. Dico parallelogrammum *adeb* eſſe ad parallelogrammum *afgc*, ut *ab* ad *ac*: nam conſtitutis rectangulis punctatis ſuper eaſdem baſes, erunt illa rectangula æqualia parallelogrammis. (3.14.) Sed hæc rectangula ſunt ut illorum baſes: (per præcedentem) E. parallelogramma etiam ſunt ut illorum baſes, nim. *adeb. afgc :: ab. ac.*

40. Triangula in eiſdem parallelis conſtituta ſunt ut baſes; ſunt enim ſemiſſes parallelogrammorum.

41. Quan-

41. Quando triangula habent baſes ſuas in eadem linea recta, & eorum vertix incidit in idem punctum, tunc cenſentur eſſe inter eaſdem parallelas, ut *a d e* & *c d e*, vel etiam *a d e* & *b d e*.

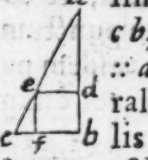
42. Si in triangulo ducatur linea parallela ad baſin, hæc proportionaliterſecabit trianguli crura.



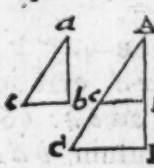
Sit triangulum *a b c* & linea *d e* parallela ad *b c*, dico *a d. a e :: a b. a c.* & *:: d b. e c.* Nam ſi concipiantur lineæ *c d* & *e b*, triangulum *c e d* erit ad triangulum *e a d*, ut *c e* ad *e a:* (6. 40. 41.) ſimiliter triangulum *b d e* ad triangulum *d a e*, eſt ut *b d* ad *d a.* Sed triangulum *c e d* eſt æquale triangulo *b d e:* (3. 16.) E. etiam triangulum *b d e* ſive *c e d* eſt ad triangulum *e a d* ut *b d* ad *d a* vel ut *c e* ad *e a:* ergo etiam *b d. d a :: c e. e a*, quia tam ratio *b d* ad *d a*, quàm ratio *c e* ad *e a* exprimunt eandem rationem trianguli *b e d* vel *c e d* ad triangulum *e a d*.

43. Si

43. Si in triangulo *a c b* ducatur linea *d e*, parallela ad basin *c b*, dico *e d. c b :: a d. a b* vel *:: a e. a c :* nam ducta *e f* parallela ad *a b*, erit *f b* æqualis *e d.* (3.9.) sed per præcedentem *f b. c b :: e a. c a ::* ergo *e d, c b :: e a. c a* vel *:: d a. b a.*



44. *Triangula similia* appellantur illa, quæ habent omnes tres angulos æquales, id est, singulos hujus singulis alterius, licet triangula ipsa sint inæqualia. Ex. gr. si angulus *A* est æqualis ang. *a*, & angulus *B* ang. *b*, & ang. *C.* ang. *c*, totum triangulum *A B C* erit simile triangulo *a b c.*



45. Si duo triangula habuerint duos angulos duobus angulis utrumque utrique æquales, etiam reliquus reliquo æqualis, & triangula ipsa similia erunt: nam cũ tres anguli in quovis triangulo efficiant duos rectos, (2.9.) necessum est, si duo anguli unius trianguli sunt æquales duobus rectis alterius trianguli, etiam tertium unius tertio alterius æqualem esse.

46. O-

46. Omnia triangula ſimilia habent ſua latera (circa angulos æquales) proportionalia. Dico *AB. ab :: AC. ac :: BC. bc.* Nam ſi in majori triangulo *ABC* ſumatur *Ab* æquale *ab*, & *Ac* æquale *ac*, triangulum *Abc* totum æquale erit triangulo *abc*; (2.11.) ſic angulus *Abc* eſt æqualis ang. *abc* (2.11.) ergo etiam æqualis eſt angulo *B*, qui per hypotheſin æqualis eſt ang. *b*: Ergò linea *bc* eſt parallela lineæ *BC*: (1.31.) Ergo (6.42.43.) *Ab. AB :: Ac. AC :: bc. BC.* ✕

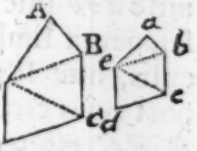
47. Omnia triangula ſimilia, inter ſe rationem duplicatam habent ſuorum laterum homologorum. Sit *abc* ſimile *ABC*, ita ut *ab. AB :: bc. BC.* Primò, ſi *b* & *B* ſunt anguli recti, ſint terminata rectangula *bcda*, & *BCDA*, hæc rectangula *bd* & *BD* erunt inter ſe in ratione duplicata lateris *bc*, ad latus homologum *BC*, vel ut quadratum ſuper *bc* conſtitutum, ad quadratum ſuper *BC* (6.29.33.) Sed trian-

gu-

gulum *a b c* eſt ſemiſſis rectanguli *b c d*, (3.8.) & triang. *A B C* eſt ſemiſſis rectanguli *B C D*. (3.8.) Ergo etiam hæc triangula ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum homologorum, &c. Secundò, ſi triangula non ſunt rectangula, ut in figura ſecunda, ſint ductæ parallelæ *a d* & *A D*, & poſtea ſint conſtituta rectangula *b c d e* & *B C D E*, 1. triangula *a d c* & *A D C* erunt ſimilia, quia angulus *d* eſt æqualis angulo *D*. nimirum ambo recti. Et præterea, angulus *d a c* eſt æqualis ang. *D A C*, quia ſunt æquales angulis *a c b* & *A C B*: (1.31.) Ergo *a c. A C :: c d. C D*. (6.46.) Ergo *a c. A C :: b c. B C*: (per hypotheſin) E. *c d. C D :: b c. B C*: & per conſequens etiam rectangula *b d* & *B D* ſunt ſimilia (6.31.) & inter ſe ſunt ut quadrata ſuorum laterum homologorum: (6.33.) Ergo etiam ſemiſſes illorum, id eſt, (3.18.) triangula *a b c* & *A B C* ſunt in ratione duplicata ſuorum laterum homologorum, vel ut quadrata &c.

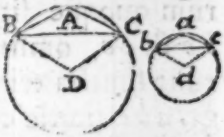
48. Polygona ſimilia ſunt, quæ habent æque multa latera, ita ut ſinguli

guli anguli unius sint æquales singulis alterius polygoni, & latera illorum circa angulos æquales proportionalia, ut si angulus *A* est æqualis ang. *a*, & ang. B ang. *b* &c.



& præterea *AB. ab. :: BC. bc :: CD. cd* &c. hæc duo polygona sunt similia.

49. Inter curvilineas vel mixtas figuras, *similes figuræ* sunt illæ, quibus inscribi vel circa quas describi possunt figuræ similes: ita ut polygono, quod inscriptum fuit vel descriptum circa unam, etiam alteri inscribi vel circumscribi possit simile. Ex. gr. si pro lubitu inscripsi aliquod polygonum *ABCDE*, majori curvilineæ figuræ, & etiam possum inscribere aliud simile minori curvilineæ, *abcde*, hæ duæ curvilineæ erunt similes. Similiter, si sumsissem duas mixtas, ut duo segmenta circuli *ABC* & *abc*,



&

& uni inſcripſiſſem pro lubitu triangulum *A B C*, poſſem verò alteri ſimile *a b c* inſcribere, erunt hæc duo ſegmenta ſimilia ; & abſolutis circulis, hæc ſegmenta erunt æquales portiones circulorum, ita ut ſi arcus *B A C* eſt tertia pars ſui circuli: etiam *b a c* erit tertia pars ſui circuli: & ſi ad centrum ducantur lineæ *B D*, *C D*, *b d*, *c d*, anguli *D* & *d* erunt æquales. (Vid. 4. 11. & ſequentes.)

50. Omnes circuli ſunt figuræ ſimiles.

51. Omnia polygona ſimilia dividi poſſunt in æqualem numerum triangulorum, ſimilium. Sint polygona

A B C D E & *a b c d e* & primum ſit diviſum in ſua triangula per lineas *B E*. *C E*: (3. 24.) dico, ſi alterum quoque ſit diviſum per lineas *b e* & *c e*, omnia triangula unius erunt ſimilia triangulis alterius. Ex. gr. *a b e* ſimile eſt *A B E*, nam angulus *a* eſt æqualis ang. *A*, (per hypotheſin) & præterea *A B*. *a b* :: *A E*. *a e*: (etiam per hypotheſin) Ergo tri-

triangulum *A B E* est simile *a b e* (6. 46.) Porro probatur angulum *E B C* esse æqualem angulo *e b c*, quia angulus *A B C* supponitur esse æqualis *a b c*, & ceu jam probatum, angulus *a b e* est æqualis ang. *A B E*: si igitur ab æqualibus auferantur æqualia, angulus *E B C* æqualis erit angulo *e b c*. Similiter probatur angulum *e c b* esse æqualem *E C B* & per consequens (6.45.) totum triangulum *e b c* erit simile triangulo *E B C*, & sic de reliquis.

52. Omnia polygona similia inter se sunt in ratione duplicata suorum laterum homologorum, sive ut quadrata super latera homologa constituta. Dico, ut quadratum *A B* se habet ad quadratum *a b*, sic totm polygonum *A B C D E* se habet ad polygonum *a b c d e*: nam cum omnia triangula unius polygoni similia sint triangulis alterius (6. 51.) erunt omnia hæc triangula unius polygoni ad omnia alterius in ratione duplicata laterum homologorum, quæcunque etiam illa fuerint, id est, ut quadratum *A B*, ad quadratum *a b*.

53. O-

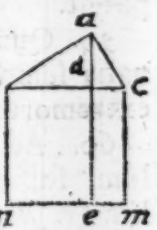
53. Omnes figuræ ſimiles, etiam curvilineæ, inter ſe ſunt ut quadrata ſuper latere quodam figurarum ſimilium ſive inſcriptarum ſive circumſcriptarū conſtituta. Sint ex. gr. circuli, quibus inſcripti ſint duo triangula ſimilia *b a c* & *A B C*, dico totum circulum *A B C* ſe habere ad circulum *a b c*, ut quadratum *B C* ad quadratum *b c*, ſive quod idem eſt, ut quadratum ſemidiametri *D B* ad quadratum ſemidiametri *d b*: nam circulo *a b c* (ſaltim cogitatione) inſcribi vel circumſcribi poteſt quodcunque polygonum. (4.30.) Sed omne polygonum inſcriptum *a b c* minorem rationem habebit ad circulum *A B C*. quam quadratum ſuper *b c* ad quadratum *B C*, & omne circumſcriptum circulo *a b c* majorem rationem habebit ad circulum *A B C*, prout facile probari poterit per præcedentem & per ea, quæ dicta ſunt de circulo in libro quarto: E. &c.

54. Omnia hæc applicari poſſunt ad

ad ſolida. *Solida ſimilia* ſunt illa, quæ habent angulos æquales & latera proportionalia, vel quibus inſcribitur, vel circumſcribitur &c.

55. Solida ſimilia inter ſe ſunt ut cubi, &c. Vid. 6. 36. 37. &c.

56. Si in triangulo rectangulo *abc* ducatur ab angulo recto *a* perpendicularis *a d* in *hypothenuſam* (ſive latus maximum) *b c*, tria erunt rectangula inter ſe ſimilia, nimirum *a d c*, *a d b* & totum *b a c*: nam 1. quodlibet horum trium triangulorum habet angulum rectum. 2. triangula *a b c* & *a b d* habent angulum *b* communem: E. ſunt ſimilia: (6.45.) 3. triangula *a b c* & *a d c* habent angulum *c* communem: E. ſunt ſimilia.



57. Perpendicularis *a d* eſt media proportionalis inter *c d* & *d b*, id eſt, ut *c d. d a :: d a. d b*. Nam cum triangula *c d a* & *a d b* ſint ſimilia per præcedentem, erit *c d* (crus minus trianguli *c d a*) ad *d a* (crus majus) ut *a d* (crus minus trianguli *a d b*) ad *d b* crus majus. (6. 46.)

58.

58. Quadratum *a d* est æquale rectangulo ex *c d* & *d b* constituto: nam cum *c d. d a :: d a. d b* (per præcedentem) rectangulum extremorum *c d* & *d b* erit æquale rectangulo mediorum *d a* & *d a* (6.28.) Sed cum duo latera hujus rectanguli sint æqualia, quia *d a* bis sumitur, sequitur rectangulum hoc esse quadratum *d a*: & sic propositio sequens generalis poni potest.

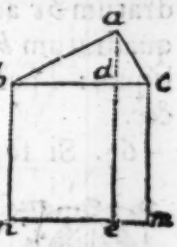
59. Quadratum mediæ proportionalis semper æquale est rectangulo extremorum.

60. Ad exprimendum rectangulum, sufficit tres literas adhibere. Ex. gr. *si ponitur rectangulum b d c*, tunc volumus exprimere rectangulum, cujus alterum latus est *b d* & alterum *d c*; & si diceretur *rectangulum b c d*, tunc vellemus exprimere rectangulum, cujus alterum latus esset *b c*, & alterum *c d*.

61. In omni triangulo rectangulo quadratum super *hypothenusa* (sive maximo latere) constitutum est æquale duobus quadratis *crurum*. (vel reliquorum laterum.) Sit quadratum

b c

b c m n per perpendicularem *a d* in duo rectangula *d e m* & *d e n* divisum; dico rectangulum *d e m* esse æquale quadrato *a c*, & rectangulum *d e n* quadrato *a b*; & per consequens totum quadratum *b c m n* esse æquale quadratis *a c* & *a b*: nam 1. cum duo triangula *a d c* & *b a c* sint similia (6. 56.) erit *d c* ad *a c* (in minori triangulo *a d c*) ut *a c* ad *b c*: (in majori triangulo *b a c*) ergo *a c* est media proportionalis inter *d c* & *b c* vel *c m*; sic quadratum *a c* est æquale rectangulo *d c m* (6. 59.) 2. Ob eandem rationem probatur *b a* esse mediam proportionalem inter *b d* & *b c* vel *b n* &c. ✓



62. Si in tribus lateribus trianguli rectanguli constituantur tres figuræ similes, similiterque positæ, maxima erit æqualis duabus reliquis: nam cum figuræ hæ similes sint ut quadrata in lateribus homologis constituta, (6. 53.) figura

ra *A* erit ad figuras *B* & *C*, ut quadratum *b c* ad quadrata *c a* & *a b*. Sed quadratum *b c* eſt æquale duobus reliquis: (per præcedentem) ergo, &c.

63. Si ſuper maximo latere *b c* fiat ſemicirculus *b a c*, & ſuper reliquis lateribus duo alii ſemicirculi *b n a*, & *a m c*; maximus ſemicirculus æqualis erit reliquis duobus. (per præcedentem.) Si ab utraque parte auferatur commune; ſegmenta nim. ſtriata *b a* & *a c*; quod ab utraque parte reliquum, erit æquale; id eſt, triangulum *b a c* ab una parte æquale erit duabus lunulis *b n a* & *a m c* ab altera parte: & hæc eſt *quadratura Lunarum Hippocratis.*

64. Quando triangulum *b a c* eſt eſt Ioſceles, lunulæ ſunt æquales: ita ut triangulum *b a o*, ſemiſſis trianguli *b a c*, ſit æquale cuivis lunulæ: ſed quando tri-

an-

angulum eſt ſcalenum, ut in ſecunda figura, lunulæ ſunt inæ-

quales, & æque difficile eſt dividere triangulum *b a c* in duas partes per lineam *a o*, ut demonſtrari poſſit triangulum *b a o* eſſe æquale lunulæ *b n a* & triangulum *o a c* lunulæ *c m a*; æque difficile eſt, inquam, hoc præſtare, quàm invenire quadraturam circuli. *r*

65. Duæ chordæ ſe ſecantes in circulo, habent ſua ſegmenta *reciproca*, id eſt, reciproce proportionalia. Dico ut *a e. b e :: e d. e c.* & per conſequens rectangulum *a e c* eſſe æquale rectangulo *b e d*: nam ſi concipiantur *d c* & *b a*,

erunt duo triangula ſimilia, *a e b* & *d e c*. Nam 1. habent angulum ad *e* oppoſitum ad verticem; (1.23.) 2. angulus *d* eſt æqualis angulo *a*, (4. 12.) quia inſiſtit eidem arcui *b c* & in eadem circumferentia eſt: Ergo hæc duo triangula ſunt ſimilia; ſic *a e. b e :: e d. e c.* (6.46.)

66. Si *a c* eſt eſt diameter circuli & *d b* perpendicularis, erit *d e* vel *b e* media proportionalis inter *a e* & *e c*, quia *d e* æqualis erit *e b* (4. 6.) ſic *a e. d e :: b e* vel *d e. e c.* & quadratum *d e* æquale rectangulo *a e c.*

67. Duæ lineæ ductæ à puncto extra circulum aſſumto ad circumferentiam, ab eaque intus terminatæ, inter ſe ſunt reciprocæ ut illarum ſegmenta externa: Dico *a c. a d :: a e. a b* & per conſequens rectangulum *c a b* eſſe æquale rectangulo *d a e:* nam ſi concipiantur lineæ *b d* & *e c* erunt duo triangula ſimilia *a b d* & *a e c:* nam 1. angulum *a* communem habent. 2. Angulus *d* eſt æqualis angulo *c*, (4. 12.) quia inſiſtunt eidem arcui *b e:* Ergo triangula *a b d* & *a e c* ſunt ſimilia; (6.45.) ſic *a d. a c* (quæ ſunt majora latera duorum triangulorum) *:: a b. a e.* (quæ ſunt minora latera eorundem triangulorum.)

68. Si

68. Si una harum linearum *a b* tangat circulum in *b*, dum interea altera eundem secat in *e* & *d*, tunc *ab* est media proportionalis inter *ae* & *a d*: nam ductis lineis *be* & *b d*, triangula *a b d* & *a e b* erunt similia, quia 1. angulum *a* communem habent. 2. Angulus *abe* est æqualis angulo *b d e* (4.17.) cum ergo hæc duo triangula similia sint, *a e. a b* :: (quæ sunt duo latera minoris trianguli *a b e*) :: *a b. a d* (quæ sunt latera homologa alterius trianguli *a d b*.)

69. Sit diameter *a b* secta in *c* per perpendicularem infinitam *c e*, vel intra circulum, ut in prima figura, vel in circumferentia ut in secunda figura, vel extra circulum, ut in tertia figura: si præterea ex puncto *a* pro lubitu ducta linea recta, secans perpendicularem in *e*, & circulum in *d*; dico semper *a d. a c* :: *a b. a e*.

a e. Nam ſi ducatur linea *b d*, erunt duo triangula ſimilia *e a c* & *d a b*, quia 1. angulum habent communem *e a c* & *d a b*. 2. etiam rectum habent; nam ang. *a c e* rectus eſt (per hypotheſin) & ang. *b d a* quoque eſt rectus (4.14.) ergo hæc duo triangula ſunt ſimilia *a d. a c :: a b a e*.

70. In ſecunda figura *a b* ſemper eſt media proportionalis inter *a d* & *a c*, & in prima, media eſt *a E*, ubi circulus lineam *c e* ſecat.

71. Si in triangulo inſcripto, angulus *b a c* eſt diviſus bifariam, id eſt, in duas partes æquales, per lineam *a e d*. Dico *b a. a e :: a d. a c*; nam ducta linea *b d*, erunt duo triangula ſimilia *a b d* & *a e c*, quia 1. angulus *d* eſt æqualis angulo *c*. (4.12.) tanquam inſiſtens eidem arcui *a b* & in eadem circumferentia. 2. angulus *b a d* eſt æqualis angulo *e a c* per hypotheſin: E. hæc duo triangula ſunt ſimilia: & propterea *a b. a d :: a e. a c*.

72. Quando angulus in vertice ita diviſus eſt in duas partes æquales, ſeg-

ſegmenta baſis ſunt proportionalia cum lateribus *b a. a c :: b e. e c:* nam concipiatur *e f* parallela ad *b a*, tunc erit *b a. a c :: e f. f c.* Sed *e f* eſt æqualis *a f*, quia ang. *a e f* æqualis eſt ang. *e a b.* (1. 31.) & per conſequens angulo *e a f*: ſic triangulum *a f e* eſt Iſoſceles; (2.15.) & vice hujus comparationis *b a. a c :: e f. f e* ponere poſſumus hanc *b a. a c :: a f. f c.* vel etiam (6. 42.) *b e. e c.* Q. E. D.

73. Si duo circuli ſe intus contingant, & ex puncto contactus *a* ducatur tangens, & perpendicularis *a c b*, quæ per centra duorum circulorum tranſibit, (4.5.) & præterea quævis alia linea ſecans duos circulos in *e* & *d*. Dico ſemper *a e. a d :: a c. a b*: nam ductis lineis *e c* & *d b*, triangula *a e c* & *a d b* erunt ſimilia cum habeant ang. communem in *a* & alium rectum in *e* & *d*. (4.14.)

74. Etiam arcus *e c* erit ad arcum *d b* ut totus circulus *a e c* ad circulum *a d b*. (6.49. & 4.11.&c.)

LI-

LIBER SEPTIMUS.

De Incommenſurabilibus.

1. MInor quantitas dicitur in-poſterum *metiri* majorem, quando minor aliquoties ſumta exacte æquat majorem. Ex.gr. ponamus ulnam, continere ſex pedes, pes unus *metietur* ulnam, quia pes ſexies ſumtus exacte æquat ulnam.

2. Quantitas, quæ metitur majorem, appellatur *pars* majoris, & major dicitur *multiplex* minoris: ſic pes eſt pars ulnæ, & ulna eſt multiplex pedis.

3. Si ſumatur magnitudo unius paſſus, qui continet pedes duos & dimidium, & tentaverit quis metiri ulnam, id præſtare non poterit, nam ſi ſumatur paſſus tantùm bis, reſultabunt duntaxat quinque pedes, qui nondum æquant ulnam: & ſi idem paſſus ter ſumatur, reſultabunt pedes ſeptem cum dimidio, qui ulnam ex-

ce-

cedent: sic igitur hæc quantitss duorum pedum cum dimidio non metitur ulnam, neque proprie dicitur *pars* ulnæ: nihilominus dicere possumus illas esse *partes*, nam hæc quantitas continet quinque pedes dimidios: sed pes dimidius est pars ulnæ, nam si duodecies sumatur, eam metitur: sic igitur passus hic continet partes ulnæ, quia continet quinque pedes dimidios, qui sunt $\frac{5}{12}$ id est, quinque partes duodecimæ unius ulnæ.

4. Quando duæ quantitates ita comparatæ sunt, ut inveniri possit tertia quantitas, quæ sit pars utriusque, id est, quæ utramque metitur, tunc hæ duæ quantitates sunt *cõmensurabiles*: sic quantitas unius passus, & ulna sunt duæ quantitates commensurabiles, quia dari potest tertia quantitas, nimirum pes dimidius, qui metietur ulnam & passum: nam pes dimidius quinquies sumtus æquat passum, & idem pes dimidius sumtus duodecies æquat ulnam.

5. Si vero possibile non est inveni-

nire tertiam quantitatem, quæ metiatur utramque, tunc hæ duæ quantitates ſunt *incommenſurabiles*.

6. Magnitudines commenſurabiles ſunt *ut numerus ad numerum*, id eſt, hæ magnitudines exprimi poſſunt per certos numeros, ita ut magnitudo ſe habet ad aliam magnitudinem, ſic certus numerus ſe habeat ad alium certum numerum. Ex. gr. ſi linea eſt unius ulnæ vel ſex pedum, & alia linea unius paſſus ſ. duorum pedum cum dimidio, hæ duæ lineæ erunt ut numerus ad numerum; nam quia pes dimidius metitur utramque, alteram per quinque & alteram per duodecim, manifeſtum eſt, eum altera contineat quinque pedes dimidios, & altera duodecim, has duas lineas eſſe ut 5. ad 12. & per conſequens ut numerus ad numerum.

7. Si duæ magnitudines non ſunt ut numerus ad numerum, id eſt, ſi poſſibile non eſt exprimere magnitudines per duos numeros, erunt incommenſurabiles: quod certum eſt per præcedentem.

8. Di-

8. Diſpiciendum igitur nunc eſt, an revera tales magnitudines dentur, quæ per numeros exprimi non poſſunt: nam ſi hoc eſt, neceſſum erit dicere, dari magnitudines incommenſurabiles.

9. *Numerus planus* eſt qui provenire poteſt ex multiplicatione duorum numerorum. Ex. gr. ſex eſt numerus planus, quia provenit ex multiplicatione 3. & 2. nam bis ter ſunt ſex. Similiter 15. eſt numerus planus, quia provenit ex multiplicatione 5. per 3. Similiter 9. eſt numerus planus, quia provenit ex 3. per 3.

10. Numeri, qui in ſe mutuo multiplicati, planum producunt, appellantur *latera* plani, ut 2. & 3. ſunt latera plani 6. Similiter 3 & 5. ſunt latera plani 15.

11. Si concipiantur unitates ut parva quadrata, ea in formam rectanguli collocari poterunt, ſi numerus illarum fuerit planus. Ex. gr. 12. quadrata collocantur in formam rectanguli, cujus alterum latus continet 6. & alterum 2. Similiter 48.

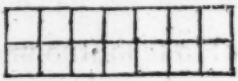
conſtituet rectangulum, cujus alterum latus eſt 12. & alterum 4. Vid. fig. ſequentes *B & C*.

12. *Numerus quadratus* eſt planum, cujus latera ſunt æqualia, ut 4. reſultans ex multiplicatione 2. per 2. ut 9. provenies ex 3. per 3. ut 16. ex 4. per 4. &c.

13. Numerus quadratus collocari poteſt in formam quadrati; & numerus qui collocari poteſt in formam quadrati, eſt quadratus, & qui non poteſt hac ratione collocari, non eſt numerus quadratus.

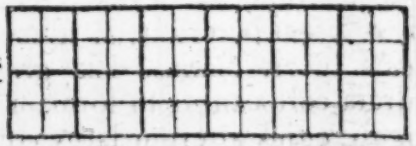
14. Numeri *plani ſimiles* ſunt, qui collocari poſſunt in formam rectangulorum, ſimilium, id eſt, quorum latera ſunt proportionalia ut 12. & 48. nam latera plani 12. ſunt 6. & 2.

B



A

C



ceu videre in figura *B*. & latera plani

ni 48. ſunt 12. & 4. ceu videre eſt in figura *C*. ſed 6. 2 :: 12. 4.

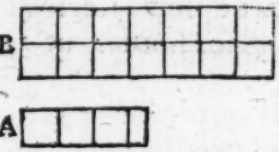
16. Omnis numerus collocari poteſt in forma lineæ rectæ, & in hoc ſtatu haberi poteſt pro plano : hinc 3. in figura *A* erit planum ſimile 12. nam latera plani 3. ſunt 3. & 1. quia ſemel ter facit ter, & latera plani 12. ſunt 6. & 2. ſed 3. 1 :: 6. 2.

17. Dantur numeri, qui non ſunt plani ſimiles, ut ab 1. uſque ad 10. ſunt 1. 4. 9. qui cum quadrati ſint, ſimiles ſunt ; poſtea ſunt 2. 8. qui habent unum latus duplum alterius : reliqui non ſunt plani ſimiles, ut 3. 5. 6. 7.

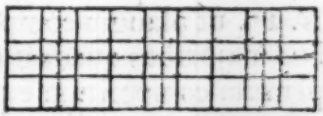
18. Si numerus quadratus multiplicet alium num. quadratum, producetur tertium quadratum. ex. gr. *A*. 4. & *B*. 9. ſint numeri quadrati & ſe multiplicent, producantque numerum *C*. nim. 36. Dico hunc numerum tertium eſſe quadratum : nam multiplicare *B* per *A* eſt ſumere *B* toties, quot ſunt unitates in *A*. Sed totum numerum *B*. 9 conſiderare poſſum, tanquam

quam quadratum unicum, illudque toties ſumere, quot ſunt unitates ſ. parva quadrata in *A*: & quemadmodum unitates in *A* ſunt poſitæ in formam quadrati; ſic etiam toties quadratum *B* ponere poſſum, tanquam tot unitates: hinc erunt 4 *B*. quæ conſtituent quadratum totum *C*. 36.

19. Si ſint duo numeri plani ſimiles, major dividi poteſt in tot quadrata, quot ſunt unitates in minori. *A*. 3. & *B*. 12. ſunt plana ſimilia: ita ut latus 3. ad latus 6. ſit ut latus 1. ad latus 2. Poſſum dividere planum *B*. 12. in tria quadrata ſimiliter locata ut tria parva quadrata plani *A*, & quodlibet majorum quadratorum in *B* reſpondebit 4. illorum in *A*. Similiter ſi plana ſunt 8. & 72. poſſum dividere 72. in 8. quadrata, quorum quodlibet continebit 9. illorum in minori plano 8. Idem etiam accidet, ſi vel unus vel ambo ſunt numeri fracti, ut ſi *A* continet 3. cum dimidio & *B* 14. poſſum dividere 14. in tria



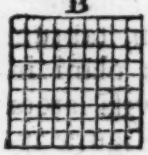
tria quadrata cum dimidio, eodem modo disposita ut in *A*, ceu videre est in parvis quadratis punctatis, quæ figuris adjecta sunt. Similiter si plana sunt *B*. 12. & *D*. 27. possum dividere 27. non tantùm in tria quadrata eodem modo disposita ut illa in *A*, sed etiam in 12. eodem modo posita ut illa in *B*: quod videre est per lineas punctatas. Ad hoc præstandum, tantum dividuntur latera majoris plani in tot partes, in quot sunt divisa latera homologa minoris plani. Figuræ ipsæ rem totam facilem reddent.



20. Numeri plani, qui sic dividi possunt, ut tot sint quadrata in majori plano, quot sunt unitates in minori, sunt similes: hæc est conversa præcedentis.

21. Duo numeri similes in se mutuo multiplicati producunt numerū quadratum. Nam diviso majori plano in tot quadrata, quot sunt unitates in altero plano (7.19.) Multiplicabitur pla-

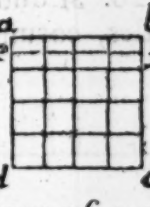
planum per aliud, ſi majora quadrata majoris plani toties ſumantur, quot ſunt unitates vel parva quadrata in minori plano, id eſt, toties quot ſunt ipſa. Sed multiplicare numerum quadratum per eundem numerum, nihil aliud eſt quàm conſtituere quadratum ex quadratis. Ex. gr. *A.* 3. & *B.* 27. cum ſint plana ſimilia, conſidero *B.* 27. ut planum compoſitum ex tribus majoribus quadratis, ut *A.* 3. eſt planum compoſitum ex tribus unitatibus, vel tribus parvis quadratis. Si jam ſumo hæc tria majora quadrata toties, quot ſunt unitates in *A*, id eſt, ter, tunc produco ter tria quadrata majora *B*, i. e. 9. quadrata, quorum quodlibet reſpondet 9. illorum, quæ ſunt in *A*, & omnia 9. quadrata in *B* reſpondebunt 81. illorum in *A*; ita ut *A.* 3. multiplicatum in *B.* 27. producat 81. qui eſt numerus minorum quadratorum in formam quadratam diſpoſitus, & per conſequens (7. 13.) hic numerus 81. eſt quadratus. Similiter ſi plana ſunt



12. & *D.* 27. divido 27. in 12. quadrata, quæ multiplico per 12. & reſultant 144 majora quadrata poſita in formam quadrati, quæ reſpondent 324 illorum in minori plano.

22. Si duo numeri plani ſint ſimiles, quacunque ratione unum diſponatur, eadem ratione poteſt diſponi alterum. Sint 3. & 12. plana ſimilia ut ſuprà. Si diſponantur 12. in lineam rectam ad conſtituendum rectangulum, cujus latus unum ſit 12. & alterum 1. Dico etiam 3. poſſe diſponi in rectangulum ſimile, cujus latus unum habebit 6. & alterum ſeniſſem unius &c.

23. Si numerus dividat alium numerum quadratum, producet numerum tertium, qui erit planus ſimilis diviſori. Sit quadratum *ac* 16. & dividatur per quemcunque numerum ex. gr. per 8. Id quod fit, ſi ſumatur octava pars lateris *ad*, nimirūm *ae* & ducatur parallela *ef*; nam reſultabit planum *af*, quod erit octava pars quadrati *ac*. Sed di-



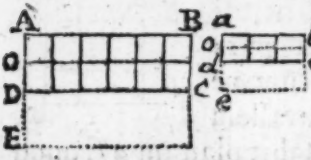
vi-

videre numerum vel planum per 8. est sumere octavā partem hujus numeri sive plani. Dico *af* esse planum simile ad 8. Nam cum 8. sit dispositus in lineam rectam ad constituendum rectangulum, cujus unum latus sit 8. & alterum 1. rectangulum *af* ipsi erit simile, quia *ae* sumta est octava pars ab *ad* vel *ab*: Ergo ut 8. ad 1. (quæ sunt latera plani 8. divisoris) Sic *ab* ad *ae* (quæ sunt latera plani provenientis ex quadrato *ac* divisi per 8.) Ergo &c. Q. E. D.

24. Si duo numeri plani se mutuo multiplicantes producant quadratū, sunt similes.

25. Duo numeri plani non similes se mutuo multiplicantes, non possunt producere numerū quadratū. Hæ propositiones sunt corol. præcedentium.

26. Si duo numeri sint plani similes, eorum æquè multiplices quicunque, & illorum partes æquales quæcunque, sunt etiam plani similes. Sint plani *abcd* 3. & *A*

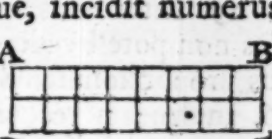


BCD

BCD 12. ſimiles, ita ut *ab. AB :: bc. BC.* Dico ſi ſumatur duplum unius & duplum alterius (vel quivis alius æque multiplex) hæc dupla erunt ſimilia: Nam ſumta *ae* dupla *ad*, & *AE* dupla *AD*, ad conſtituendum planum *be* duplum plani *bd* & planū *BE* duplū plani *BD*, manifeſtum eſt ut *ad. AD :: ae. AE.* ſed *ad. AD :: ab. AB.* Ergo etiam *ae. AE :: ab. AB*; Et per conſequens plana *be* & *BE* ſunt ſimilia. Similiter ſe habebit ſi ſumantur illorum ſemiſſes *bo*, *BO* vel quævis aliæ partes æquales.

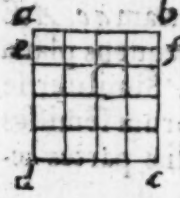
27. Si duo numeri ſint plani non ſimiles, eorum æquè multiplices quicunque, & eorum partes æquales quæcunque etiam erunt non ſimiles. Hoc ſequitur ex præcedente.

28. Inter duos numeros planos ſimiles quoſcunque, incidit numerus medius proportionalis. Sint numeri plani ſimiles 2. & 8.



Dico poſſibile eſſe invenire tertium numerum qui medius proportionalis erit:

erit: nam ſi concipiatur planum 8. in lineam rectam *AB* diſpoſitum,& planum 2. etiam in lineam rectam *AD*,& ex his duabus lineis fiat planum *AC* 16. hoc planum *AC* 16. proveniet ex multiplicatione duorū numerorum 2. & 8. (6. 17. & ſeqq.) & per conſequens numerus parvorum quadratorum totius plani *AC* 16. erit numerus quadratus, (7. 21.) & poteſt diſponi in figuram quadrati (7.13.) Sit igitur diſpoſitus in figuram quadratam *ac*; Sic quadratum *ac* erit æquale plano *AC*, quia eſt idem numerus aliter ſaltem diſpoſitus. Ergo (6.59.) latus *ab* 4. erit medius proportionalis inter *AD* 2. & *AB* 8.



29. Inter duos numeros non ſimiles non poteſt cadere numerus medius proportionalis. Sint numeri 4. & 6. in lineam rectam diſpoſiti, & ſe mutuo multiplicantesproducant planum 24. hoc planum 24. non eſt numerus quadratus; (7. 25.) & per con-

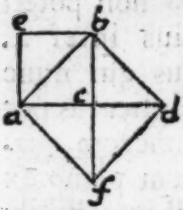
conſequens non poteſt diſponi ut numerus quadratus. Ergo non poteſt haberi numerus medius inter 4. & 6. Nam hic numerus qui nunc concipitur medius multiplicatus per ſe ipſum, produceret numerum quadratum, aliunde æqualem plano ex *A* & 6. (6. 59.) quod eſt impoſſibile quia planum 24. ex 4. & 6. productum non eſt numerus quadratus.

30. Sint duæ lineæ *ae* & *ec*, ut numerus ad alium numerum non ſimilem: ex. gr. ut 1. ad 2. Sit præterea *eb* media proportionalis, ita ut *ae. eb :: eb. ec.* Dico *eb* eſſe incommenſurabilem duobus extremis *ae* & *ec:* nam

cum *ae* & *ec* ſint ut 1. & 2. id eſt, ut numeri non ſimiles (per hypotheſin) æquè ac illorum æque multiplices quicunque, (7.27.) nunquam erit poſſibile invenire numerum medium proportionalem inter *ae* & *ec*, (per præcedentem) & per conſequens *eb* non erit ad *ae* vel *ec* ut numerus ad numerum: Ergo illa eſt incommenſurabilis.

31.

31. Diameter quadrati *a b* est incommensurabilis lateri *a c*. Nam sumta *a d* dupla *a c* & facto triangulo *a b d*, quod erit simile *a b c*, quia cum *c d* sit æqualis *c b*, angulus *c d b* est æqualis angulo *c b d*; (2. 15.) Sic angulus *c d b* est semissis recti æque ac *c a b*. Ergo *a b d* est rectus, &c. Sic *a c. a b :: a b. a d*. Ergo *a b* est media proportionalis inter *a c* 1. & *a d* 2. Et per consequens (per præcedentem) incommensurabilis.

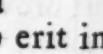


32. *Potentia* lineæ appellatur quadratum quod constituitur super illa linea. Potentia lineæ *a c* est quadratum *a c b e*, & potentia lineæ *a b* est quadratum *a b d f*. Et linea *a b* dicitur *bis posse lineam a c*, qui mos loquendi à Græcis transumtus & in Geometriam receptus fuit.

33. Diameter *a b* est commensurabilis *potentiâ* lateri *a c*, id est, quadratum *a b d f* est commensurabile quadrato *a b c e*, cum unum sit duplum alterius.

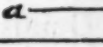
34. Sed

34. Sed ſi ſumatur *a o* media proportionalis inter *a b* & *a c*, hæc media *a o* erit incommenſurabilis in potentia, id eſt, quadratum lineæ *a o* erit incommenſurabile quadrato *a c*, vel quadrato *a b*: nam quadratum *a c* ad quadratum *a o* eſt in ratione duplicatâ *a c* ad *a o*, (6.29.) id eſt, ut *a c* ad *a b*, (6.30.) Sed *a c* eſt incommenſurabile *a b*: (7.31.) Ergo etiam quadratum *a c* etiam eſt incommenſurabile quadrato *a o*.



35. *Secunda potentia* lineæ eſt cubus, qui hanc lineam pro latere habet.

36. Si ſumantur *a n* & *a m*, duæ mediæ proportionales inter *a c* & *a b*, ita ut *a c*. *a n* :: *a m*. *a b*. erit linea *a n* incommenſurabilis ſecunda potentia *a c*, id eſt, cubus *a c* erit incommenſurabilis cubo *a n*, quia cubus *a c* eſt ad cubum *a n* in ratione triplicata lateris *a c* ad latus *a n*, id eſt, ut *a c* ad *a b*. Sed *a c* & *a b* ſunt incommenſurabiles &c. Sunt verò etiam *a c* & *a m* commenſurabiles ſecunda potentia, nam cubus *a m* eſt duplus cubi *a c*.



37. Quæ dicta sunt de numero plano facilè applicari possunt numeris solidis. *Numeri solidi* appellantur illi, qui proveniunt ex multiplicatione numeri plani per quemcunque numerum: Ex. gr. 18. est numerus solidus ortus ex 6. (qui est numerus planus) multiplicato per 3. vel ex 9. multiplicato per 2.

38. Numeri *solidi similes* sunt illi, quorum parvi cubi ita disponi possunt, ut constituant parallelopipeda rectangula similia.

39. Numeri *cubici* sunt illi qui disponi possunt in formam cuborum, ut 8. vel 27. quorum latera sunt 2. & 3. *bases* verò 4. & 9.

40. Omnis numerus cubicus multiplicans alium numerum cubicum, producit tertium numerum cubicum.

41. Inter duos numeros solidos similes, incidunt duo numeri medii proportionales. *Saltem applicari debent solidis, quæ jam demonstrata sunt in ordine ad plana.*

42. Hæ demonstrationes quibus probatur dari lineas & magnitudines

nes incommenſurabiles, probant etiam *continuum* non eſſe compoſitum ex punctis finitis: nam ſi diameter æquè ac latus quadrati eſſent compoſita ex punctis finitis, punctum metiretur latus & diametrum: Nam punctum inveniretur certis aliquot vicibus in latere & certis quoque vicibus in diametro; quod eſt impoſſibile (per demonſtrationes præcedentes.)

43. Quia in triangulo rectangulo quadratum lateris maximi eſt æquale duobus quadratis reliquorum laterum, (6.61.) Semper adhibitum fuit illud triangulum ad inveniendas incommenſurabiles: nam ſi omnia tria latera ſunt commenſurabilia, poterunt omnia tria exprimi tribus numeris, & tunc quadratum maximi numeri erit æquale quadratis duorum reliquorum numerorum; ut ſi maximum latus eſt 5. pedum, minimum 3. mediocre 4; quadratum ex 5. erit 25. & reliqua quadrata erunt 9. & 16. & hæc duo ſimul ſumta 9. & 16. conſtituunt tertium 25. Sed ſi latus minimum eſt 2. mediocre 3. maximum

mum latus non poterit exprimi per numeros, quia quadratum minoris lateris 4. additum quadrato mediocris 9. facit 13. qui exprimit quadratum lateris maximi: Sed ut hic numerus 13. non eſt numerus quadratus, ſic etiam non poteſt habere latus ſive radicem per aliquem numerum expreſſam.

44. Omni tempore ſolliciti fuerunt veteres in indiganda aliqua methodo ad inveniendos diverſos numeros qui exprimerent tria latera trianguli rectanguli, ut ſecuri eſſe poſſimus hæc tria latera eſſe commenſurabilia. En methodum, qua inveniri poſſunt omnes numeri poſſibiles huic ſcopo convenientes.

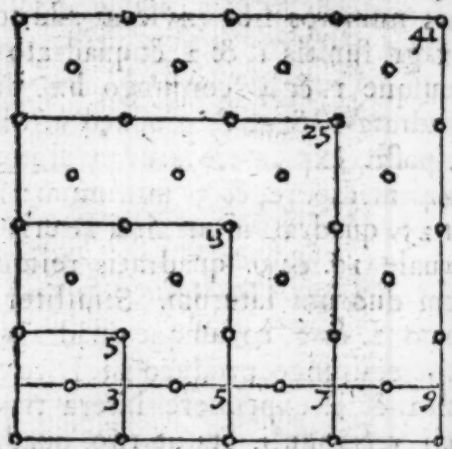
45. Si ſumantur duo numeri quicunque, (etiam ipſa unitas) quorum differentia ſaltem eſt unitas & conjungantur duo quadrata horum duorum numerorum; reſultabit numerus qui erit radix quadrati æqualis duobus quadratis; Et hic numerus exprimit latus maximum trianguli rectanguli, latus mediocre exprimetur numero unitate ſaltem minori;

ri; & latus minimum per duos primos numeros ſibi invicem additos. Ex. gr. ſumtis 1. & 2. & quadrato utriuſque 1. & 4. conjungo hæc duo quadrata 1. & 4. & produco 5. dico 5. poſſit exprimere latus maximum, & 4. mediocre, & 3. minimum: ita ut 25. quadratum maximi lateris ſit æquale 16. & 9. quadratis reliquorum duorum laterum. Similiter ſi ſumo 2. & 3. eorumque quadrata 4. & 9. conjungo, produco 13. Dico 13. & 12. & 5. exprimere latera trianguli rectanguli, ita ut 169. quadratum de 13. æquale ſit 144. & 25. quadratis ex 12. & 5. Similiter ſumtis 3. & 4. eorumque quadratis 9. & 16. additis producuntur 25. Dico 25. eſſe maximum latus trianguli, 24. latus mediocre & 7. minimum.

Hæc omnia facilius inveniuntur hac ratione.

46. Si diſponantur unitates decuſſatim, omnes numeri conſtituentes figuram quadratam erunt numeri convenientes ad exprimendum latus maximum. Latus mininum erit numerus comprehenſus in duobus pri-

oribus ordinibus figuræ quadratæ, &



latus mediocre erit unitate minus latere maximo.

47. Si hæc figura continuata fuerit, dabit omnes numeros possibiles: Sed notari debet æquè multiplices trium numerorum inventorum idem præstare; ut inventis 5. 4. & 3. eorum dupli 10. & 8. & 6. exhibebunt tria latera trianguli, ita ut 100. quadratum ex 10. sit æquale 64. & 36. quadratis ex 8. & 6. Similiter eorum tripli 15. 12. 9. idem faciunt: Quivis enim videt omnes hos numeros semper eandem servantes proportionem

nem non nisi unum triangulum exprimere nimirum illud quod exprimitur per 5. 4. & 3. & sic omnes hi numeri debent haberi pro iisdem.

LIBER OCTAVUS.

De Progressionibus & Logarithmis.

1. *Progressio* est series quantitatum, quæ inter se invicem similem aliquam habitudinem habent, & quælibet harum quantitatem appellatur *terminus*.

2. Quando termini se mutuo insequentes æqualiter crescunt vel decrescunt; Progressio appellatur *Arithmetica*, ut sunt numeri naturali serie procedentes 1. 2. 3. 4. 5. &c. vel etiam numeri impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. vel etiam ut 4. 8. 12. 16. vel etiam 20. 15. 10. 5. 0.

3. Progressio arithmetica potest augeri in infinitum sed non diminui.

4. Si in progressione arithmetica

ſumantur quatuor termini, quorum duo priores à ſe invicem tantum diſtant, quantum duo poſteriores; Hi quatuor termini dicuntur proportionales in proportione arithmetica, ut in progreſſione numerorum naturalium 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. &c. Si ſumamus 2. 3 ::: 9. 10. (hæc nota ::: inpoſterum indicabit proportionem arithmeticam) erit eadem proportio arithmetica inter 2. 3. quæ eſt inter 9. & 10. id eſt, 10. excedere 9. tantum, quantum 3. excedit 2. Similiter 3. 5 ::: 8. 10. ſunt in proportione arithmetica. Sicut etiam 1. 5 ::: 5. 9. ubi 5. bis repetitur & eſt medium arithmeticum inter 1. 9.

5. In proportione arithmetica aggregatum duorum extremorum eſt æquale aggregato duorum mediorum, ut in 2. 3 ::: 9. 10. aggregatum ex 2. & 10. eſt 12. & aggregatum ex 3. & 9. etiam eſt 12. Similiter in 3. 5 ::: 8. 10. aggregatum ex 3. 10. eſt 13. & aggregatum ex 5. & 8. quoque eſt 13. Ratio hujus ex ſe ſatis manifeſta eſt, nam ſi 10. excedit 8. etiam id quod additur 8. nimirum 5. excedit

cedit tantùm illud quod additur 10. nimirum 3. & sic oritur æqualitas.

6. Aggregatum sive summa primi & ultimi termini est æqualis summæ secundi & penultimi, vel tertii antepenultimi &c. ut in primo exemplo 1. & 9. faciunt 10. & similiter 2. & 8. vel etiam 3. & 7. vel 4. & 6. semper suut 10. & in medio restat 5. qui bis sumtus (tanquam respondens duobus, quia æqualiter distat à primo & ultimo) etiam efficit 10.

7. Si addatur primus terminus ultimo & multiplicetur illorū summa per semissem numeri terminorum, productum erit æquale aggregato omnium terminorum simul sumtorum, ut hic si 1. addatur 9. ut oriantur 10. & multiplicentur per 4. & $\frac{1}{2}$ (sunt enim 9. terminini) fient 45. qui sunt summa omnium terminorum ab 1. usque ad 9. Hoc manifestum est per præcentem.

8. Quando termini progressionis sunt continuo proportionales; id est, si 1. est ad 2. ut idem est ad 3. & ut 4. ad 5. &c. Tunc progressio appel-

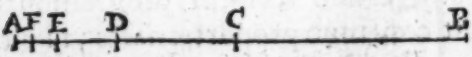
latur *Geometrica*, ut 1. 2 4. 8. 16. 32. vel etiam 1. 3. 9. 27. 81. vel etiam 3. 12. 48. 192. 768. vel 8. 4. 2. 1. $\frac{1\ 1\ 1\ 1}{2\ 4\ 8,\ 16}$, &c.

9. Progressio Geometrica potest augeri & diminui in infinitum.

10. Quando progressio incipit ab 1. secundus terminus appellatur *radix vel latus:* tertius appellatur *quadratum* vel secundus gradus: quartus, *cubus* vel tertius gradus: quintus *quadrati quadratũ* vel quartus gradus, sextus *surſolidus* vel quintus gradus, septimus *quadrati cubus* &c.

11. Si sumantur quatuor termini, quorum duo priores tantùm distant à se invicem in progressione, quantum duo posteriores, erunt simpliceter proportionales, & productum extremorum erit æquale producto mediorum (6. 28.)

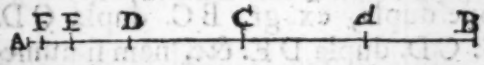
12. Sit Quantitas *AB* divisa in



C, in *D*, in *E*, in *F*, &c. ita ut $\frac{AB}{AC}$

AC :: *AC*. *AD* :: *AD*. *AE*, &c. Dico *BC*. *CD*. *DE*. *EF*. &c. esse in progressione Geometrica continuè proportionales, & *AB*. *AC* :: *BC*. *CD* :: *CD*. *DE*. &c. nam quia *AB*. *AC* :: *AC*. *AD* erit *dividendo AB* minus *AC*. (id est, *CB*.) *AC* :: *AC*. minus *AD*, (id est, *DC*.) *AD*. & per consequens *alternando CB*. *DC* :: *AC*. *AD* vel :: *AB*. *AC*. Sic de omnibus aliis probabitur :: *DC*. *ED*. *FE*. &c.

13. Sit progressio quantitatum in linea recta BC, CD, DE, EF, &c. Et sit sumta C *d* æqualis termino secundo CD, ut habeamus *d*B, differentiam primi & secundi termini, & fiat ut B *d* ad BC :: sic BC ad aliquā quartam lineam, nimirum BA. Dico



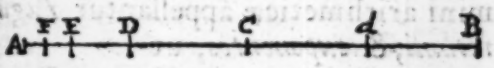
si numerus terminorum BC, CD, DE &c. sit finitus, licet quam maximus sit, omnes hos terminos simul sumtos, etiamsi illorum sint centum mille milliones, fore minores BA. Si quis supponeret esse hos terminos

infinitos in multitudine ; tunc hi termini ſimul ſumti eſſent præciſè æquales BA ; Nam quia per hypotheſin B*d*. (id eſt, BC minus C*d* vel CD) eſt ad BC :: ut BC (*i.e.* AB minus AC) eſt ad AB ; Facilè patebit ut BC. CD :: AB. AC :: AC. AD &c. & per conſequens omnes termini CD, DE. EF &c. erunt adhuc intra punctum A, ad quod eò magis appropinquabitur quo magis augebitur numerus terminorum ; Et ſic quidem videmus omnes hos terminos, (qui in ſchola appellantur *partes proportionales*) ſi actu infiniti eſſent, non facere longitudinem infinitam, quoniam ſunt incluſi in BA.

14. Hæc demonſtratio facilior redditur in exemplo progreſſionis particularis, cujus termini ſunt in ratione dupla, ex. gr. BC. dupla CD. & CD. dupla DE. &c. nam ſi numerus terminorum eſt finitus, etiamſi illorum eſſent centum milliones, & ſumatur terminus ultimus & minimus, ex. gr. FE, eique adjungatur alia quantitas ipſi æqualis, ſcil. FA ; manifeſtum eſt EA eſſe æquale pen-

ul-

ultimo termino E D: nam penultimus E D eſt duplus ultimi F E, per hypotheſin. Sed E A etiam eſt duplus F E, quia ponimus F A æquale E F. Similiter A E cum D E, id eſt, A D. erit æquale ſequenti termino C D: & tandem A C erit æquale B C. Ita ut exindè videre liceat primum & maximum terminum ſemper æqualem eſſe omnibus reliquis ſimul ſumtis, modo addatur quantitas æqualis ultimo & minimo termino: Verum ſi nihil addatur, primus ſemper erit major omnibus reliquis ſimul ſumtis. Si quis ſupponat hos terminos eſſe actu infinitos, tunc maximus B C erit præciſè æqualis omnibus reliquis infinitis ſimul ſumtis, C D, D E, E F &c,



nam quivis facile videt quo plures adjiciuntur termini eò magis appropinquari verſus A, dum ſemper medietas quæ reſtat diminuitur. Sed quando continua quantitas diminuitur medietate, & reſiduum iterum medietate & ſic porrò, manifeſtum eſt,

si supponatur actu infinities meditate fuisse diminutam, nihil tandem restare. Hocetiam demonstrari potest per deductionem ad impossibile monstrando omnes hos terminos infinitos simul sumtos, neque esse majores neque esse majores neque minores A B.

15. Exinde resolvi possunt difficultates quæ in scholis moventur contra divisibilitatem continui, & à Geometriæ ignaris pro insolubilibus habentur, cũ tamen in rei veritate nihil sint quã meri paralogismi.

16. Si ponantur duæ progressiones, altera Geometrica incipieno *a b* 1. & altera Arithmetica incipiendo *a b* 0. ita ut termini unius respondeant è regione terminis alterius, tunc termini arithmeticæ appellantur *Logarithmi*, & *exponentes*, ut

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64 128. 256.

17. Quod in progressione Geometrica, peragitur per multiplicationem & divisionem, id in Logarithmis absolvitur per additionem & subtractionem: ut si essent tres numeri 2. & 8 :: 64. & desideraretur quar-

quartus numerus proportionalis in progreſſione Geometrica, neceſſum erit multiplicare 8. per 64. (utpote qui ſunt duo termini medii) nam productum 512 erit æquale (6.28.) producto ex 2. & alio quarto numero, tanquam extremis quatuor proportionalium: ad inveniendum vero quartum hunc numerum, duntaxat neneceſſe eſt dividere 512. per 2. & prodibunt 256. eritque tota ratio 2. 8 :: 64. 256. ita ut 64. & 256. tantum à ſe invicem diſtent in ordine progreſſionis, quantum 2. & 8. (8. 11.) ſed ſi loco numerorū Geometricorum 2. 8 :: 64 ſumti fuerint Logarithmi ipſis reſpondentes, nimirum 1. 3 :: 6. & quis vellet quærere Logarithmum quartum, debuiſſet addere 3. & 6. ut prodeant 9. & ſubtrahere 1. de 9. ut prodeant 8. qui eſſet Logarithmus numero Geometrico 256. reſpondens.

18. Similiter ſi ſumantur duo numeri Geometrici 4. & 8. quibus reſpondent Logarithmi 2. & 3. multiplicatis 4. per 8. prodibunt 32. qui reſpondent Logarithmo 5. qui ex additione 2. & 3. oritur.

19. Si-

19. Similiter ſi ſumantur 16. & multiplicentur per ſeipſos, reſultabunt 256. qui reſpondebunt Logarithmo 8. qui exinde oritur ſi 4. ſibi ipſi addatur.

20. Si quis deſideraret numerum Geometricum Logarithmo 16. reſpondentem deberet ſumere 256 qui reſpondet 8. & illos in ſe multiplicare, & prodibunt 65536.

21. Si quis etiam deſideraret numerum Geometricum, qui reſponderet Logarithmo 23. debet ſumere duos Logarithmos, qui ſimul ſumti conſtituant 23. ut 7. & 16. & inter ſe multiplicare numeros Geometricos ipſis reſpondentes, nimirum 128 (ſub 7.) per 65536 (qui eſſent ſub 16.) & productum erit 8388608 quod reſponderet 23 Logarithmo, id eſt, quod vigeſimum quartum locum, poſt numerum primum 1. habere debet.

22. Exinde videre eſt qua ratione facile quis reſpondere poſſit quæſtioni quæ ordinarie proponitur, quanti væniret equus, ſi hac conditione emeretur, ut pro primo clavo ſolvatur

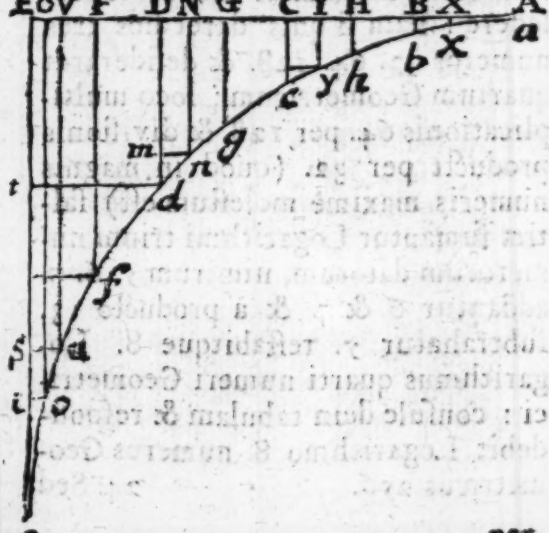
tur teruncius & pro ſecundo clavo duo teruncii pro tertio quatuor, pro quarto octo, & ſic uſque ad vigeſimum quartum: Nam vigeſimus quartus conſtabit 8388608 terunciis, id eſt, 69905 libris 8. terunciis, & duplicata hac ſumma (juxta 8. 14.) prodibit totum equum conſtare 139810. libris.

23. Si quis haberet in magnis tabulis alicujus libri duas progreſſiones longas jam abſolutas, ubi Geometrica Arithmeticæ reſponderet; poſſet quis in numeris Geometricis inveniendis calculandi labore ſupersedere: nam ſi quis daret hos tres numeros 32. 64. 128. & deſideraret quartum Geometricum; loco multiplicationis 64. per 128. & diviſionis producti per 32. (quod in magnis numeris maximè moleſtum eſt) ſaltim ſumantur Logarithmi trium numerorum datorum, nimirum 5. 6. 7. addantur 6. & 7. & à producto 13. ſubtrahatur 5. reſtabitque 8. Logarithmus quarti numeri Geometrici: conſule dein tabulam & reſpondebit Logarithmo 8. numerus Geometricus 256.

24. Sed

24. Sed quoniam in tali progressione Geometrica omnes numeri non occurrunt, hoc invenerunt medium constitueruntque duas progressiones, quarum altera, quæ continet omnes numeros 1. 2. 3. 4. 5. &c. & videtur esse progressio Arithmetica, nihilominus proprietates habet Geometricæ; & altera quæ continet numeros apparenter maximè irregulares, nihilominus est progressio arithmetica. Ecce lineam quæ perfectè continet omnia hæc mysteria.

25. Sit linea recta AE divisa in



par-

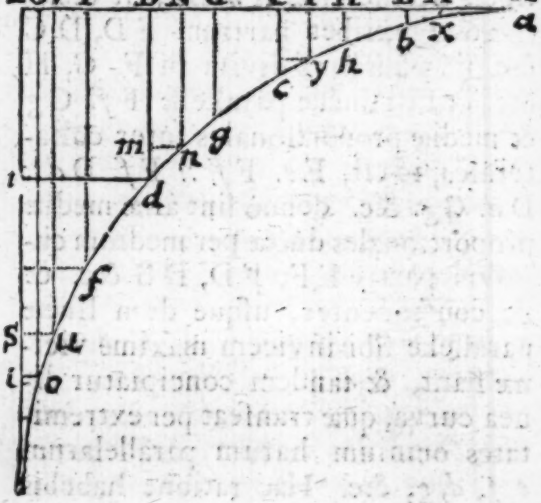
partes æquales AB, BC, CD, DE, &c. Per puncta A, B, C, &c. concipiantur lineæ rectæ A*a*, B*b*, C*c* parallelæ inter ſe, ſintq; in progreſſione Geometrica: Exempli gratia, ſi A*a* fuerit 1. B*b* 10. ſit C*c* 100. D*d* 1000. E*e*, 10000 &c. habebimus duas linearum progreſſiones, alteram Arithmeticam, alteram Geometricam: Nam lineæ AB, AC, AD, AE erunt in progreſſione Arithmetica, ut 1. 2. 3. 4. & ſic repræſentabunt Logarithmos, quibus reſpondebunt lineæ Geometricæ A*a*, B*b*, C*c* &c.

26. Quælibet partium ED, DC &c. ſit æqualiter diviſa in F, G, H &c. & ſint ductæ parallelæ F*f*, G*g* & mediæ proportionales inter collaterales, id eſt, E*e*. F*f* :: F*f*. D*d*:: D*d*. G*g*. &c. denuò ſint aliæ mediæ proportionales ductæ per medium cujuſvis partis EF, FD, DG &c. & ſic conſequenter, uſque dum lineæ parallelæ ſibi invicem maximè vicinæ fiant, & tandem concipiatur linea curva, quæ tranſeat per extremitates omnium harum parallelarum *e*, *f*, *d*, *g*, &c. Hac ratione habebis li-

lineam, cujus proprietates ſunt notatu digniſſimæ, & uſus maximi, prout ſuo loco patebit.

27. Si hæc figura accurata cum diligentia in tabula quadam magna deſcriberetur, tunc poſſet quælibet pars AB, BC, CD, &c. non tantum in 100. vel 1, 000, ſed in 10, 000. vel 100, 000. vel plures dividi. Ita ut ſi AB fuerit 100, 000. AC eſſet 200, 000. & AD 300. 000, &c. ſecundū progreſſionem Arithmeticā.

28. Suppoſitâ lineâ E*e* 10, 000



par-

partium, concipimus per quamvis partem lineas parallelas cum AE, quæ curvam in totidem punctis secent. Exempli gratia, sit linea parallela 10. ducta per partem 9. 900. totius E*e*, quæ secet curvam in *o*. Sit etiam alia parallela *o*O, secans lineam AE in puncto O in parte 399, 563. exinde quis poterit cognoscere 399, 563. esse Logarithmum numeri 9, 900. Similiter si *Su* transiret per partem 9, 000 lineæ E*e*, & *u*V secaret lineam AE in 395, 424. tunc esset hic numerus Logarithmus numeri 9. 000 &c.

29. Hac ratione posset quis conficere tabulam Logarithmorum ab 1. usque ad 10, 000, & ulterius, si quis voluerit producere lineam AE.

30. Nota, ut habeas omnes Logarithmos ab 1. usque ad 10,000. sufficit quærere Logarithmos post 1,000, usque ad 10, 000. id est, (ducta linea parallela *dt*) sumendo Logarithmos omnium partium post *t* usque ad *e*, quarum Logarithmi continentur inter E & D: nam per hoc habebis Logarithmos omnium aliarum partium,

quæ

quæ ſunt pgſt *t* ad E, & quarum Logarithmi ſunt inter D & A. Exempli gratia, cum O *o* ſit 9, 900. partium & ejus Logarithmus 399, 563, idem numerus aſſumi poterit pro Logarithmo numeri *n* N 990. & numeri Y *y* 99. mutando duntaxat cifram primam 3. quia ſecundum compoſitionem hujus lineæ, O N, vel N Y, æquales eſſe debent ED vel DC, quod quivis facile demonſtrabit. Sic O N, vel N Y continebunt 100, 000, & quia A O eſt 399, 563. ablatis O N 100, 000, reſtabunt 299, 563. pro A Y, à quibus ſi iterum auferantur 100, 000. reſtabunt 199, 563 pro A Y; & eadem ratione cum A V habeat 395, 424. pro logarithmo numeri V *u* 9, 000. etiam habebis 095, 424. pro lagarithmo X *x* 9, vel 195, 424. pro logarithmo numeri 90. vel 295, 424. pro logarithmo numeri 900.

31. Ut hac omnia etiam ad praxin deducantur per calculum, non neceſſe eſt ullam talium figurarum delineationem inſtituere, ſed ſaltim delineatas concipere: nam ope arithme-

meticæ poſſum invenire numerum medium proportionalem F *f* inter duos O *d* & E *e*, & poſtea etiam medios inter D *d* & F *f*, vel inter F *f* & E *e* &c. Sed ea quæ explicavimus ſufficiunt, ut habeamus cognitionem, quantum quidem nobis neceſſe eſt, naturæ & artificii logarithmorum: nam opus non eſt, ut ipſi calculi laborem ſubeamus & tabulam logarithmorum condamus, quia jam peractus eſt hic labor. Deus enim, boni publici cauſa, homines quoſdam excitavit, quibus magnam largitus fuit patientiam, ut ſuperare potuerint moleſtias laborum, qui videri poterant intolerabiles. Scimus quippe ultra viginti viros, ſtipendio ad id conductos per viginti annos & quod excedit in calculando aſſiduitate plane improba deſudaſſe.

32. Præter has duas progreſſiones datur & tertia, quæ appellatur *Harmonica*, quando ſumtis tribus terminis, qui ſe immeditatè conſequantur, obſervare licet, quod maximus ad minimum ſit ut differentia inter maximum & medium, ad differentiam inter

inter medium & minimum, ut 30. 20. 15. 5. &c. ſunt in progreſſione harmonica; nam ſumtis 30. 20. 15. differentia inter 30. & 20. eſt 10. & differentia inter 20. & 15. eſt 5. ſed 10. 5 :: 30. 15.

33. Hæc progreſſio poteſt diminui in infinitum, ſed non augeri.

Ea quæ jam dicta ſunt de hac progreſſione magnum uſum uon præſtant, neque etiam plane extraordinariis proferendis nunc incumbo.

In continuatione hujus Geometriæ obſervabuntur quædam proprietates hujus progreſſionis notatu digniſſimæ, quæ aliquam lucem adferre poterunt illis, quæ habemus de muſica veterum, cujus obſcuritas nondum detecta eſt. Ibi demonſtrabitur reſpectus ſeu habitudo, quam hyperbole habet ad hanc progreſſionem; nam quemadmodum angulus rectilineus inſervit inveniendis inter duas datas tot mediis, quot quis voluerit habere in ratione arithmetica, & ut linea illa curva, quam deſcripſimus in uſum logarithmorum, etiam inſervit

vit inveniendis inter duas datas tot mediis, quot quis deſideraverit in ratione Geometrica; Sic notare licebit hyperbolen inſervire inveniendis inter duas datas tot mediis, quot quis voluerit in ratione harmonica.

34. Datur quoque progreſſio quadratorum, & cuborum, quadrati quadratorum, ſurſolidorum, quadrati cuborum &c. ut 1. 4. 9. 16. 25. 36. &c. quia omnes ſunt numeri quadrati, quorum radices ſunt numeri naturales 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. Similiter 1. 8. 27. 64. 125. 216. ſunt cubi eorundem numerorum. Similiter 1. 16. 81. 256. 625. 1296. ſunt quadrati quadrata eorundem numerorum.

35. In progreſſione quadratorum poſita 0 pro primo termino, ſic 0 1. 4. 9. 16. &c. ſumma omnium terminorum eſt major tertiâ parte ultimi termini multiplicati per numerum terminorum; & hic exceſſus qui eſt ultra tertiam, ſemper tanto minor eſt, quo major eſt numerus terminorum. Similiter in progreſſi-

greſſione cuborum, hæc ſumma terminorum major eſt quarta parte; & in quadrati quadratis, illa eſt major quinta parte, & ſic conſequenter in reliquis. Hoc ut probemus, ſufficit ſaltim facere inductionem, prout videre eſt in hac tabula, ubi ſecunda columna continet progreſſi-

1	0	0	0					
2	1	1	2	$\frac{1}{2}$	vel	$\frac{1}{3}$	+	$\frac{1}{6}$
3	4	5	12	$\frac{5}{12}$	vel	$\frac{1}{3}$	+	$\frac{1}{12}$
4	9	14	36	$\frac{7}{18}$	vel	$\frac{1}{3}$	+	$\frac{1}{18}$
5	16	30	80	$\frac{9}{24}$	vel	$\frac{1}{3}$	+	$\frac{1}{24}$
6	25	55	150	$\frac{11}{30}$	vel	$\frac{1}{3}$	+	$\frac{1}{30}$
7	36	91	252	$\frac{13}{36}$	vel	$\frac{1}{3}$	+	$\frac{1}{36}$

onem

onem quadratorum poſt 0. Tertia columna complectitur ſummas terminorum. Exempli gratia, ibi videre licet ſummam poſt 0. uſque ad 9. eſſe 14. Quarta columna continet productum cujuſque termini multiplicati per numerum terminorum qui ſunt poſt 0. uſque ad ipſum; numerus ille notatus eſt in prima columna, ut 36. eſt productum ex 9. multiplicato per 4. Quinta columna comprehendit fractiones, quæ exhibent proportionem numerorum tertiæ & quartæ columnæ, ut è regione 14. & 36. ponitur $\frac{7}{18}$, qua fractione hoc volumus 14. eſſe ad 36. ut 7. eſt ad 18. & ſic etiam eſſe ſummam terminorum 14, ad productum ex 9. multiplicato per 4. nim. ad 36. ut 7. ad 18. Ulterius, in eadem columna quinta, poſt $\frac{7}{18}$ obſervantur & hi characteres (vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$); quibus hoc volumus $\frac{7}{18}$ tantum valere, quantum una ter-

tia

tia una cum una decima octava parte, quia revera $\frac{7}{18}$ tantum valent quantum $\frac{6}{18}$ una cum $\frac{1}{18}$, id est, $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ ita ut summa 14. sit tertia pars ex producto 36. & præter illam adhuc una decima octava pars ex 36. Similiter,

1	0	0	0	
2	1	1	2	$\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
3	4	5	12	$\frac{5}{12}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$
4	9	14	36	$\frac{7}{18}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$
5	16	30	80	$\frac{9}{24}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$
6	25	55	150	$\frac{11}{30}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{30}$
7	36	91	252	$\frac{13}{36}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}$

repe-

reperio 30. tanquam ſummam terminorum uſque ad 16. eſſe majorem tertia patre ex 80. tanquam producto ex 16. per 5. & exceſſum eſſe $\frac{1}{24}$: nam $\frac{30}{80}$ tantum valent quantum $\frac{3}{8}$, vel quantum $\frac{9}{24}$ vel quantum $\frac{8}{24} + \frac{1}{24}$ vel tandem quantum $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$. Sed $\frac{1}{24}$ tantum non eſt quantum $\frac{1}{18}$; ſic igitur in continuatione hujus tabulæ obſerre licet, hos exceſſus, qui ſunt ultra tertiam partem, ſemper diminui, prout numerus terminorum creſcit: nam hi exceſſus ſunt $\frac{1\ 1\ 1\ 1\ 1}{24\ 30\ 36\ 42\ 48}$, &c. dum denominator fractionis interea ſemper augetur numero ſenario.

36. Si quis conſtitueret ſimilem tabulam cuborum, tunc videre erit fractiones, quæ erunt ultra partem quartam, ſemper valore diminui, dum interea illarum denominator

augetur quaternario, quoties novus terminus in progreſſione additus fuerit ; & ſimiliter in reliquis progreſſionibus per ſimiles tabulas id obſervare dabitur, quod generaliter in propoſitione præcedente dictum fuit.

Omnia hæc erunt maxime utilia in continuatione hujus Geometriæ, ubi etiam plures aliæ progreſſiones occurrent.

LIBER

LIBER ULTIMUS.

Problemata vel Geometria Practica.

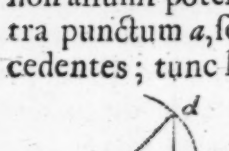
1. *Problema* appellatur in Geometria propositio, quæ docet aliquid constituere ac praxin demonstrat, contra ac *Theoremata*, quæ sunt propositiones speculativæ, in quibus considerantur passiones seu proprietates rerum jam factarum.

2. *Ex puncto dato* a *quod est in linea* b a c *perpendicularem erigere*. Abscinde circino utrinque partes æquales *a c* & *a b:* parum refert sive hæ partes magnæ sint seu parvæ, modo fuerint æquales. Aperi paulo plus crura circini, & ex punctis *b* & *a* tanquam centris, duos describe arcus similes, se mutuo in puncto *d* intersecantes. Postea adplicata regula ad puncta *a* & *d*, duc lineam *a d*

quæ erit perpendicularis desiderata (2. 16.)

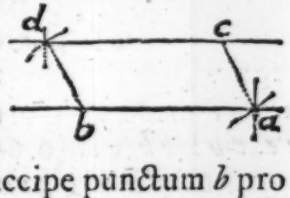
3. *Ex puncto dato* d *ducere perpendicularem versus lineam* b a c. Ex centro *d* describe arcum circuli, qui secet lineam in duobus locis *b* & *c*: dein ex hisce duobus punctis *b* & *c* eadem circini apertura, describe duos parvos arcus, se mutuo intersecantes in *e*, & erit linea *d e* perpendicularis quæsita (2. 16.)

4. Quando puncta data *a* vel *d* sunt ad extremitates chartæ vel superficiei, in qua figura constitui debet, & non assumi potest distantia debita ultra punctum *a*, secundum praxes præcedentes; tunc hac ratione processus erit instituendus. Si punctum *a* datum est in linea, assume extra lineam punctum, ubi libuerit versus *e*, & ex eo tanquam centro describe circulum, qui transeat per *a* & secet lineam in *b*: Dein ex *b* duc lineam *b e*, secabit circulum in *d*; recta *d a* du-



ducta erit perpendicularis ad *b a* (4. 14.) Si verò punctum *d* datum eſt extra lineam, duc lineam pro lubitu *d b*, & ex medio hujus lineæ deſcribe circulum *b a d*, qui ſecet *b a* in *a*; linea *d a* erit perpendicularis deſiderata. (4. 14.)

5. *Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ, parallelam ducere.* Sit linea data *a b*, & punctum datum *c*, per quod ducenda ſit parallela: ex puncto *c* tanquam centro deſcribe arcum circuli, qui ſecet lineam datam in *a*: dein in eadem linea data accipe punctum *b* pro lubitu, quod tamen, quantum fieri poteſt, remotum ſit à puncto *a*, & ex hoc puncto *b* eadem circini apertura fac alium arcum circuli *d*: Accipe circino diſtantiam *a b*, & hac ipſa apertura, ex puncto *c* tanquam centro, deſcribe arcum qui ſecet alium in *d*; applicata regula ad duo puncta *c* & *d* habebis lineam *c d* parallelam lineæ *a b*; nam quadrilaterum *c a b d*, habet latera oppoſita æqualia per ipſam

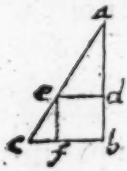


ſam conſtructionem; & per conſequens eſt parallelogrammum, per converſam nonæ propoſitionis libri tertii.

6. *Inter duas lineas datas* a e *&* e c *invenire mediam proportionalem.* Diſpoſitis lineis datis *a e* & *e c* in lineam rectam, ut conſtituant lineam totam *a c*, quære in ea medium *f* & ex hoc puncto *f* deſcribe circulum *a b c*: erige perpendicularem *e b*, quæ ſecet circumferentiam circuli in puncto *b*, erit linea *a b* media proportionalis, ita ut *a e. e b :: e b. e c.* (6.66.)

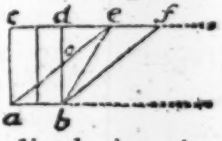
7. *Conſtituere quadratum æquale rectangulo dato.* Accipe mediam proportionalem inter duo latera rectanguli, & quadratum ſuper hac media conſtitutum erit quæſitum (6.59.)

8. *Datis tribus lineis, invenire quartam proportionalem.* Sint lineæ datæ *a d, d e, a b;* conſtitutis *a d* & *a b* in unam rectam, & *d e* tranſverſim poſita, ut emergat triangulum *a d e*, produc latus *a e* verſus *c*, &



& ex puncto *b* duc parallelam *b c*, dico lineam *b c* esse quartam proportionalem desideratam, & ut *a d. d e :: a b. b c.* (6.43.)

9. *Triangulo dato* a e b *æquale parallelogrammum rectangulum constituere.* Per sumitatem *e* duc *e c* parallelam basi *a b*, erit rectangulum *a b d c* duplum trianguli *a e b :* (3.18.) divisa verò basi *a b* in duas partes æquales, & erecta perpendiculari, orietur rectangulum æquale triangulo.



10. *Dato rectangulo, constituere aliud rectangulum æquale, quod habeat longitudinem datam.* Sit rectangulum datum *a b c*, cui constituendum sit aliud æquale, quod pro latere habeat longitudinem *e f*. Hic habemus tres lineas, datas nimirum *a b, b c* (quæ sunt latera rectanguli dati) & *e f*, quæ esse debet latus alterius rectanguli constituendi. Nunc igitur inquirenda est quarta linea, quæ sit alterum latus hujus rectanguli. Datis istribus li-

neis, quære ex illis quartam proportionalem (9.8.) quæ ſit *e h*, ita ut *e f. a b :: b c. e h:* dico rectangulum *f e h* fore deſideratum æquale rectangulo *a b c.* (6. 27.)

11. *Quodcunque polygonum in quadratum effingere.* Reſolve polygonum in triangula (3. 22. vel 24.) & conſtitue tot rectangula æqualia his triangulis, (9. 9) ita ut omnia hæc rectangula habeant eandem longitudinem: (9. 10.) conjunge omnia hæc rectangula, ut unum ex illis reſultet, & fac quadratum (9. 7.) æquale huic rectangulo, & habebis quod quæris.

12. *Dividere circulum in quatuor, in ſex, & omnes arcus in duas partes æquales.* Ut dividatur in quatuor partes, neceſſum eſt ducere duas perpendiculares per centrum, ut *d a c* & B *a e*. Si eum vis dividere in octo partes, divide quēvis arcum B *c*, *c e* &c. in duas partes; quod fit, ſi ex punctis B & *c* duos arcus eadem circini apertura deſcripſeris:

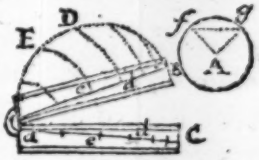
ſeris: nam ducta linea ex puncto interſectionis ad centrum *a*, dividet arcum B*c* in duas partes æquales: eodem modo procedes cum reliquis arcubus. Ut dividere poſſis circulum in ſex partes, accipe circino ſemidiametrum: nam ea nim. ſemidiameter ſexies circumferentiæ applicata, hanc perfecte metietur: ſic conſequenter dividi poteſt circulus in partes 12. & 24. & 48. &c.

13. *Dividere circulum in quinque, in quindecim & alias partes æquales.* Hoc fieri poteſt geometrice hac methodo, quam demonſtro in Algebra. Conſtitue triangulum rectangulum, cujus alterum crus ſit ſemidiameter circuli, & alterum ſemiſſis ſemidiametri. Ab hypothenuſa hujus trianguli auſer dimidium ſemidiametri, reſiduum erit chorda 36°. & latus Decagoni. Duplicato hoc arcu, prodibit arcus 72°. qui eſt quinta pars circuli; & chorda horum 72°. erit hypothenuſa trianguli rectanguli, cujus alterum crus eſt ſemidiameter, & alterum

rum decagoni latus. Sed quemadmodum per præcedentem docuimus invenire 60°. Sic etiam habebimus differentiam inter 36. & 60. nimirum 24°. quæ eſt decima quinta pars circuli. Sed in praxi breviſſima & certiſſima via eſt, circino iteratis vicibus aperturam quærere, quæ, ſi quinquies adplicata fuerit circumferentiæ, eam exacte metiatur: poſtea quælibet harum partium eodem modo dividatur in tres, quærendo per circinum & repetendo, ſi prima vice rem non tetigeris: & habebis circulum in quindecim partes diviſum. Si quælibet harum 15. partium etiam dividatur in quatuor, & quælibet harum quatuor in ſex, erit totus circulus in 360. gradus diviſus. Et hæc diviſio maximè commoda eſt ad praxin. Nota, quod nondum inventa ſit methodus dividendi geometrice arcum in tres partes æquales, neque in quinque, neque in ſeptem, neque in alias partes impares. Dico geometrice, nihil præter lineam rectam & circulum adhibendo.

Di-

Diviſio hæc circuli in 360. *gradus etiam maximè utilis eſt, ſi quis ſciverit uſum circini ceu inſtrumenti proportionum: eſt hoc genus aliquod circini, quod habet brachia lata* a B, a C, *in quibus notatæ ſunt diverſæ lineæ & diverſæ diviſiones, quarum illæ, quæ maximũ uſum præſtant, reducuntur ad duas: nam in uno latere circini eſt quædam linea in quovis brachio* a e B, & a e C, *quæ inſervit diviſioni totius circuli in* 360. *gr. una opera abſolvendæ, & ut pro lubitu gradus quoſcunque ſumere poſſim. Diviſio circini abſolvitur modo ſequente .....*



Inſtrumentum proportionum ſiguare ſeu præparare, ut inſerviat diviſioni circuli. Concipe ſemicirculum *a* E D B, qui exacte diviſus ſit in 180°. ſi ex puncto *a* per ſingulos gradus ducerentur arcus, qui ſecarent lineam *a e* B; exempli gratia, ſi ex 60° *E* duceretur arcus E *e*, & ex 90° D arcus D *d* &c. notari deberet 60. in bra-

brachio instrumenti è regione *e*, & 90. è regione *d* &c. Si in altero brachio *a* C pariter processeris, habebis hoc latus instrumenti divisum, prout necessum est.

15. *Explicare usum instrumenti proportionum, quatenus inservit divisioni circuli.* Sit datus circulus A *f*, accipe circino communi semidiametrum A *f*, dein adplicato altero pede hujus circini communis ad punctum *e*, id est, gradum 60. in uno brachio circini ceu instrumenti proportionum, tamdiu remove aut admove alterum brachium, usque dum pes alter communis circini præcisè incidat in punctum *e* alterius brachii Instrumenti proportionum, ita ut distantia *e e* æqualis sit semidiametro A *f*; Jam si statim invenire volueris

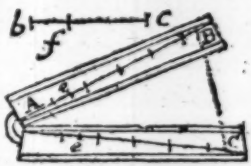
90. circuli dati, impone saltim duos pedes circini in duo puncta *d*, *d*, & transfer hanc distantiam in *fg*, & habebis arcum *fg* 90. graduum. Sic si volueris sumere 35. gradus, saltim impone pedes circini communis in puncta linex *a* B, *a* C, in quibus sunt

35.

35. gradus, & transfer hanc diſtantiam in circulū datum, & hac ratione procedere debes cum quovis alio gradu.

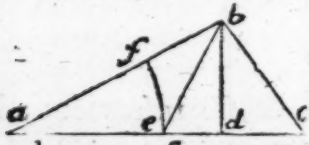
Omnia hæc fundantur in propoſitionibus 42. 43. 49. 50. libri ſexti: nam quemadmodum omnes circuli ſunt figuræ ſimiles, (6.50.) chorda *fg* erit ad ſemidiametrum A*f* ut chorda *a*D ad ſemidiametrum *e d*, id eſt, ut *a d* ad *a e*. Aliunde verò triangula *a d d* & *a e e* ſunt ſimilia, & ſic *d d. e e :: a d. a e*. Sed *d d* per conſtructionem æqualis eſt *fg* & *e e* lineæ A*f*: ergo *fg*. A*f :: a d. a e*.

16. *Signare ſ. præparare inſtrumentum proportionum, ut inſervire poſſit diviſioni linearum rectarum.* Ex centro circini ſint in brachiis ductæ duæ lineæ verſus B & C, quarum quælibet diviſa ſit in 100, vel 200. partes æquales, & ſic inſervient ad dividendam una opera lineam datam



tam, in quotcunque partes volueris. Exempli gratia, ſit linea data *b c* & ab ea debeant ſumi $\frac{25}{97}$ id eſt, 25 nonageſimæ ſeptimæ partes; Hoc in caſu dividi deberet tota linea *b c* in 97 partes æquales, ut ex iis ſumi poſſent 25. quod prolixum eſſet; ſed ope circini proportionum id facile abſolvitur. Accipe circino communi longitudinem lineæ *b c*, & applicato uno pede nonageſimæ ſeptimæ parti B unius brachii inſtrumenti proportionum, admove vel remove alterum brachium tamdiu, uſque dum pes alter præciſe incidat in 97 partem C alterius brachii; dein transfer diſtantiam *e e* in *b f*, & *b f* erit exacte $\frac{25}{97}$ totius lineæ *b c*: id quod etiam fundatur in eo, quod triangula A B C & A *e c* ſunt ſimilia.

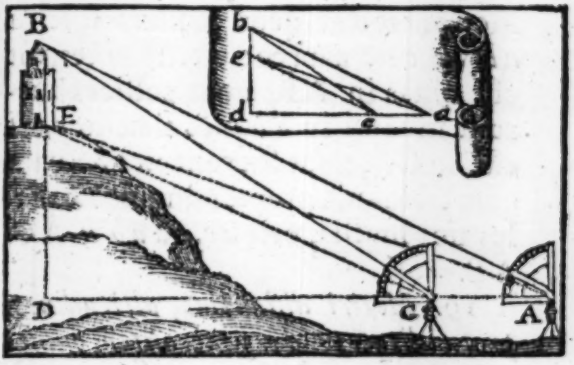
17. *Super datam lineam conſtituere angulum tot graduum, quot deſideraveris.* Sit linea data *a c*, ſuper qua conſtituendus



detur

detur angulus 30 graduum. Ex puncto *a*, tanquam centro, describe circulum *e f*, in quo sume per circinum proportionum, vel aliter 30. gradus à *e* usque ad *f*, & per hunc 30. gradum ducatur linea *a f*, quæ cum linea *a c* constituet angulum 30. graduum.

18. *Cognitis angulis dati trianguli & uno latere, invenire reliqua latera.* Si tibi dicatur, esse alicubi triangulum, cujus basis A C sit decem ulna-

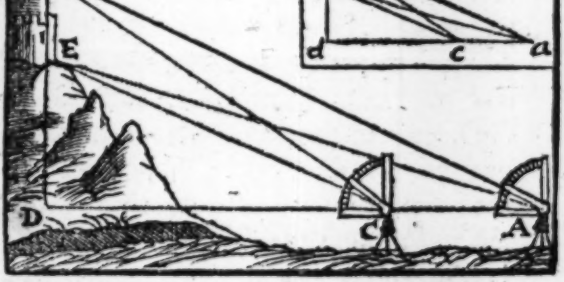


rum & angulus ad basin, ut ACB habeat 150. gr. & angulus CAB 20. gr. (& per consequens tertius angulus ad verticem erit 10. quia omnes tres anguli 150. 20. 10. simul sumti effi-

efficiunt 180. id est, duos rectos) & à te quæratur, quot ulnas habere debeat quodvis reliquorum duorum laterum A B, C B. Fac in charta vel potius in tenui chartaceo triangulũ simile *a c b* sequentem in modum: Accipe basin pro lubitu *a c* 10. pollices longam, vel quascunque alias decem partes: super *c a* describe duos angulos, alterum *c a b* 20. grad. & alterum *a c b* 150. grad. (9.27.) & duæ lineæ *a b*, *c b* se mutuo intersecabunt in aliquo loco, nimirum in *b*. Metire igitur quot pollices sint in *a b* vel *c b*: nam certus esse potes, tot esse ulnas in A B, quot pollices fuerunt inventi in *a b*; & similiter tot esse in C B, quot fuerunt in *c b*: nam cum triangula propter angulos æquales sint similia, erit *a c*, ad *a b* :: A C. A B.

19. *Metiri distantias, altitudines, profunditates, & generaliter omnes magnitudines locorum dissitorum & inaccessibilium.* Si in vertice alicujus montis, qui eminus apparet, constituta sit turris B E, & quis vellet observare illius distantiam & altitudinem,

nem, is deberet aliquo inſtrumento (ex. gr. quadrante, id eſt, quarta circuli parte, quæ diviſa ſit in 90. grad. & inſtructa regula quadam, circa centrum mobili, quam *dioptram* appellamus) hoc inquam inſtrumento ſumere deberet duos angulos in diverſis ſtationibus, ſequentem in modum. Si es in ſtatione A, ita conſtitue inſtrumentum, ut latus unum exacte reſpondeat lineæ horizontali A D, & hunc ſitum neque attollendo neque deprimendo muta: Applica oculum ad A, id eſt, centrum inſtrumenti & dirige regulam verſus verticem turris B tamdiu, donec illa cum tuo ra-



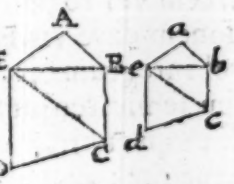
dio viſuali coincidat: tunc hæc regula

gula in circumferentia inſtrumenti notabit gradus anguli BAD: Eſt enim circumferentia inſtrumenti in gradus diviſa. Poſtea muta ſtationem, & progredere in loco plano ad 10. ulnas (vel pro lubitu in quavis alia diſtantia) uſque ad C, & ibi denuo cape alium angulum BCD, cujus ope habebis angulum deinceps BCA quia hi duo ſimul ſumti æquales ſunt duobus rectis: & ſic in triangulo ACB cognitam habes baſin, quam 10. ulnis longam ſumſiſti: præterea etiam cognitos habes duos angulos ad baſin; & per conſequens ex hiſce potes elicere latus CB vel latus AB. (9. 18.) Accipies etiam altitudinem BD, vel diſtantiam AD, ſi in parvo triangulo ſimili ducas ex puncto *b* perpendicularem *b d*; nam BD vel AD habebunt tot ulnas, quot *b d*, vel *a d* pollices. Si acquiſita altitudine BD, eadem methodo etiam inveſtigetur altitudo ED, habebis quoque magnitudinem EB à vertice ad baſin vel pedem turris.

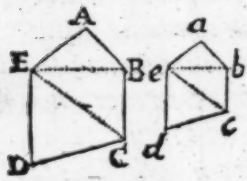
Interdum loco acceſſus verſus turrim & obſervationum à vertice ad baſin,

sin, nec non angulorum, qui à radiis visualibus & horizontali constituuntur; interdum inquam conducit sumere duas stationes juxta se invicem; sed ad idem recidit, & praxis revera non differt. Hoc modo, ut quivis videt, metiri possumus omnes magnitudines, quæ saltim concipi possunt, si modo extremitates duorum locorum dissitorum observare licet. Nolo hic pluribus describere praxes speciales, neque ennarare commoda ex perspicillis & opticis tubis, qui dioptræ instrumenti applicari possunt commodo observantium inæstimabili.

20. *Delineare planum alicujus loci.* Sit urbs vel alius locus A B C D E, & desideretur à te illius planum delineari; Accipe omnes distantias laterum & linearum ex angulo in angulum ductarum, easque transfer in chartam secundū proportionem. Exempli gratia, inventa A B 30. ulnarum B C 59. C D 50. B E 67. A E 49. &c. & facta in charta aliqua scala,



la, divisa in 100 partes parvas, duc lineam *a b* 30 partium, *b e* 67. *a e* 49. hæ lineæ simul conjunctæ constituunt triangulum A B E, & si continuaveris efficere triangulum *b e c* simile B E C, &c. habebis figuram totam *a b c d e* similem loco A B C D E.

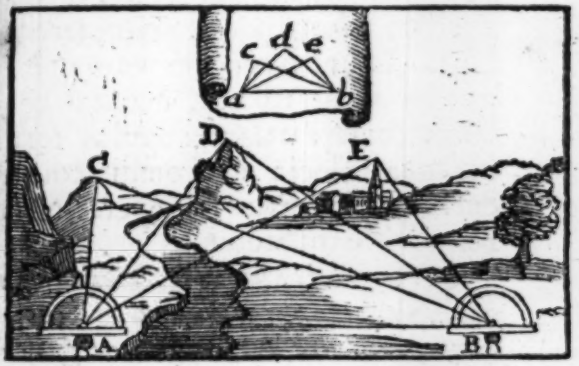


21. Si non datur intrare locum, vel metiri distantias angulorum BE, E C, necessum est sumere angulos loci, eosque in figuram transferre, ita ut si angulus B A E fuerit 66. grad. etiam angulus *b a e* sit 66. gr. & sic de reliquis.

22. *Exhibere delineationem urbis vel regionis.* Ascende in duo loca elevata A & B, è quibus conspicere possis urbem vel regionem, cujus delineationem dare vis. Habeas quadrantem, vel integrum circulum vel etiam saltim semicirculum in gradus divisum & dioptrâ circa centrum mobili instructum: colloca primo instrumentum super A, ita ut unum latus respiciat ex A versus B. instrumento

sic

ſic collocato ac firmato, reſpice turres, ædes, montes & alia loca nota-



bilia ut E, D, C &c. atque omnes hos angulos accipe mediante dioptra, eoſque memoriæ ergo nota; angulus C A B, exempli gratia, eſt $50^{o}\ 30^{I}$. angulus D A B $45^{o}\ 8^{I}$. &c. Dein procede eodem modo ſuper B & nota angulum A B C eſſe $40^{o}\ 10^{I}$. & angulum A B D $47^{o}\ 28^{I}$. &c. Poſtea in charta aſſume pro lubitu *a b*, & deſcribe angulos æquales illis, quos inveniſti; *c a b* æqualem C A B, *d a b* æqualem D A B, *a b c* A B C &c. & ſic habebis puncta *c*, *d*, *e* &c. quæ erunt

runt in eadem à se invicem distantia ac turres vel alia loca notabilia C, D, E &c. Datis jam locis principalioribus reliqua facile delineari possunt. Ad instituendam verò operationem accuratiorem, maxime conducet sumere etiam angulos tertii imò quarti loci; ut si omnia coinciderint, quis certus sit, operationem bene fuisse institutam.

23. *Cognitis duobus lateribus trianguli, & angulo ab illis lateribus comprehenso, invenire tertium latus & reliquos duos angulos.....*

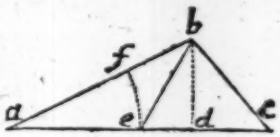
24. *Cognitis duobus lateribus & angulo uni horum laterum opposito, invenire tertium latus & reliquos angulos.....*

25. *Cognitis omnibus angulis & uno latere, invenire reliqua latera.....*

26. *Cognitis tribus lateribus, invenire omnes angulos.* Hæc omnia exacte inveniuntur, si saltim in chartaceo constituuntur triangula similia.

27. *Metiri* aream *(id est, magnitudinem sive capacitatem interiorem) alicujus trianguli dati* a b c. Ex vertice *b* duc perpendicularem *b d* ad basin

basin *a c* productam, si necesse fuerit ; divide *a c* in 10. (vel pro lubitu in quasvis alias partes) & vide quot partes contineantur in *b d* : nam multiplicata semissi perpendiculi *b d* per 10. habebis aream trianguli, (3.18.) Ut si *b d* contineret 12. partes, quales sunt decem in *a c*, tunc necessum esset multiplicare 6. per 10. ut orientur 60. capacitas trianguli *a b c*, id est, triangulum hoc tantum spatii comprehendit, quantum 60. continebunt parva quadrata, quorū quodvis latus esset decima pars lineæ *a c*.



In praxi nulla datur methodus quæ facilior vel etiam exactior sit, quam hæc ipsa, nihilominus in certis casibus maxime conducit cognitio metiendi abstractè, quæ tamen non habetur nisi mediante calculo. En igitur principia, ex quibus artificium calculandi eruitur.

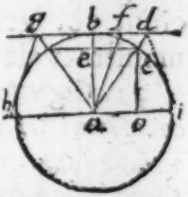
28. *Cognitis in triangulo rectangulo* a b d *duobus lateribus, invenire tertium latus per calculum.* Sit crus *b d* 3 ulnarum,

narum, & crus *a d* 4 ulnarum: multiplica 3 per 3 & 4 per 4 ut exinde oriantur duo quadrata, quæ in ſummam collecta æqualia erunt quadrato hypothenuſæ *a b*: (6. 61.) & per conſequens quadratum *a b* eſt 9. plus 16. id eſt 25. ut igitur mihi conſtet magnitudo *a b*, ſaltim ſumo latus vel radicem quadratam ex 25. quæ eſt 5. & exinde concludo *a b* eſſe 5 ulnarum. Si hypothenuſa *a b* 5. nota eſt cum uno latere *a d* 4. tunc ſubtrahi debet quadratum 16. à quadrato 25. & reſtabunt 9. quorum radix eſt 3. magnitudo alterius cruris *b d*. Interdum accidit, ut duo quadrata crurum in unam ſummam collecta, non conſtituant numerum quadratum, vel ut quadratum unius cruris ſubtractum à quadrato hypothenuſæ non relinquat numerum quadratum: ut ſi crura ſunt 2. & 3. quadrata erunt 4. & 9. quæ addita faciunt 13. Sed 13. non eſt numerus quadratus, & per conſequens non habet exactum radicem: ſed nihilominus dantur numeri, qui proxime accedunt, ut hic $3\frac{3}{5}$ eſt proxime radix ex 13. nam

$3\frac{3}{5}$ in se multiplicatis, faciunt 13. minus $\frac{1}{15}$: & sic latus *ab* est $3\frac{3}{3}$- plano majus.

Hic non traditur methodus extrahendi radices quadratas, quia hæc est regula Arithmeticæ, de qua hic non agitur.

29. *Computare tangentem, secantem & sinum* 30. *graduum.* Sit exempli gratia *b a* radius sive sinus totus, *a d* secans 30. grad. *b d* tangens, *c e* sinus; Observatu facile est, *b d* esse semissim lineæ *a d*: nam ducta *ag* alia secante 30. grad. triangulum *g a d* erit æquilaterū: nam quivis angulorum *g*, *d*, & *g a d* erit 60. grad. cum igitur *b d* sit semissis lineæ *d g*, etiam erit semissis lineæ *a d*: ob eandem rationem *c e* erit semissis lineæ *a c*. Posito igitur in triangulo rectangulo *a e c*, hypothenusam *a c* esse 2. & crus *e c* 1. & sublato quadrato 1. à quadrato 4. restabit 3. æquale quadra-



to lateris *a e*, quod æquale eſt *c o* (ſinui arcus *c* 1. 60. graduum.) Sed ſi loco 2. & 1. pro *a c* & *c e* nos ſumamus 1, 000, 000 & 500, 000, quadratum ex *c s*, nimirum 250, 000, 000, 000, ſubſtractum à quadrato 1, 000, 000, 000, 000, relinquet 750, 000, 000, 000. cujus radix quàm proxime eſt 166, 025. pro *a e* vel *c o* ſinu 60. graduum.

30. *Cognito* c e *ſinu anguli cujuſcunque, invenire* c o *ſinum complementi hujus anguli.* Complementum anguli, eſt illud quod ad 90. grad. deeſt. Exempli gratia, ſi angulus *c a b* haberet 30. grad. complementum illius erit 60. grad. nam 60. una cum 30. efficiunt 90. grad. Propoſitio hæc demonſtrata eſt in præcedente.

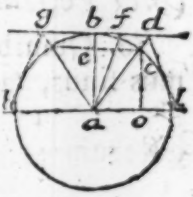
31. *Cognito* e c *ſinu anguli, & ſinu complementi, nimirum* c o *vel* a e; *invenire tangentem* b d, *& ſecantem* a d. Quia triangula *a e c* & *a b d* ſunt ſimilia, tunc ſequitur *a e. c e :: a b. b d ::* & *a e. a c :: a b. a d:* & ſic per regulam trium in arithmetica, poſito arcum *c b* eſſe 30. grad. elicitur tangentem *b d* eſſe 577, 350. & ſecantem *a d* 1, 154, 700. 31.

32. *Cognitis ſinu, tangente & ſecante alicujus arcus* b c; *invenire ſinum, tangentem & ſecantem medietatis arcus.* Ducta *a f* per medium arcus *b c*, erit *d f. f b :: a d. a b* (6. 72.) & per conſequens dabitur tangens *b f* 15. grad. ut & ſinus & ſecans eorundem 15. grad. Porro etiam denuo bifariam diviſo arcu *b f*, dabitur ſi-

o 1

nus, tangens & ſecans ¬. & 30. & poſtea 3. grad. 45. min. & ſic in infinitum.

33. *Invenire ſinum* c e 45. *grad.* Eſt hic ſinus æqualis ſinui complementi eorundem 45. grad. nimirum *e a* & per conſequens invenitur etiam tangens & ſecans



o 1

45. grad. ut & medietas 22. 30. & 11. 15. &c.

34. *Invenire ſinum* 36. *grad.* Poſtquam circulo inſcripſiſti pentagonum regulare, habebis proportionem lateris hujus pentagoni ad radium. (9. 13.) Sed latus hoc eſt chorda 72.

grad. & semissis hujus chordæ est si-
nus medietatis 72. grad. min. 36.
Hac ratione cognitus est sinus 36.
grad. & per consequens etiam tan-
o o
gens & secans ut & semisses 18. 9,
o 1 o 1
4. 30., 2. 15. &c.

35. *Invenire sinum, tangentem & secantem* 12. *grad. & medietatum*
o o o 1 1
6., 3, 1. 30., 45. &c. Postquam cognita est chorda 24. grad. quæ est latus polygoni regularis 15. laterum (9.13.) etiam innotescet &c.

36. Omnibus his collectis habebimus sinus, tangentes & secantes an-
1 o 1 o 1 o 1 o
gulorum 45., 1. 30., 2. 15. 3. 45. 4.
1 1 1
30. & reliquos omnes de 45. ad 45.

37. *Invenire sinus omnium arcuum, qui sunt inter duos arcus jam inventos à* 45. *ad* 45. Instituenda est regula proportionum. Exempli gratia, cum
1 1
sinus 45. sit 1308 erit sinus 1., 29
ut

I I
ut 45. 1 :: 1308. 29. ob eandem ra-
I
tionem ſinus 20. erit 581. Similiter,
o I
ut habeas ſinum 3. 30. ſic procedes:
cum ſinus 3. ſit 5233. (9. 35.) &
o I
præterea ſinus 3. 45. ſit 6540. (9.
32.) apparet hæc 45. minuta, quæ
o o I
ſunt inter 3. & 3. 45. importare 13
07. augmentatione ſinus: nam ſub-
lato 5233. ſinu 3. grad à 6540. ſinu
o I
3. 45. reſtant 1307. Si igitur volu-
o I
eris indagare ſinum 3. 30. ſic dices:
I
Si 45. (quæ ſunt poſt 3. grad. uſque
o I
ad 3. 45.) important 1307. pro
augmento ſinus, quantum augmenti
I o o
inferent 30. quæ ſunt inter 3. & 3.
I
30. peracta operatione invenio 871
quæ partes ſi addantur ad 5233. re-
ſultabunt 6104. pro ſinu 3. 30. &
ſic in reliquis omnibus.

Hac methodo conduntur tabulæ ſive ſinuum ſive tangentium & ſecantitium omnium angulorum à minutis ad minuta ab 0. uſque ad 90. grad.

Nota per hanc ultimam regulam non inveniri exacte ſinus, quia ſinus non eadem proportione cum arcubus ſua augmenta capiunt: ſed error tam exiguus eſt, ut non neceſſum ſit exactiorem operationem inſtituere.

38. Mediantibus his tabulis computantur triangula, quia certi ſumus in quovis triangulo latera inter ſe eſſe ut ſinus angulorum oppſitorum: exempli gratia in triangulo *a b c*, ex centro *e* circulo circumſcripto, perpendiculares *e i*, *e h*, dividunt bifariam latera *a b* & *b c* (46.) hinc *a b. b c :: a i. b h.* Sed *a i* eſt ſinus anguli *a e i*, vel *a c b*, qui (4.13.) illi æqualis, & ſimiliter *b h* eſt ſinus anguli *b e h* vel *b a c*: Ergo, &c.

39. Ex hoc principio, *cognitis duobus angulis & uno latere, vel duobus lateribus & uno angulo, invenire reliqua.* Operare per regulam proportionum;

num; ut se habet unum latus cognitum ad sinum anguli oppositi noti; sic se habet alterum latus notum ad quartum numerum, qui erit sinus anguli alteri lateri oppositi. Vel m. si duo anguli sint cogniti cum uno latere, sic procedendum erit; ut se habet sinus anguli dati ad latus huic angulo oppositum: sic se habet sinus alterius anguli cogniti ad quartum numerum, qui erit latus alteri huic angulo oppositum &c.

40. Operationes hæ nunc in compendium redactæ sunt: nam soliciti fuerunt, non tantum sinus & tangentes in tabulas redigere, sed etiam illorum logarithmos, è regione respondentes; Ita ut loco multiplicationis & divisionis, quas labore intolerabili in calculo sinuum & tangentium adhibere necessum habemus, in applicatione logarithmorum saltim additione vel subtractione utamur: ut si in triangulo *A B C*, (9. 18.) cujus latus *A C* est notum nimirum 10. ulnarum, angulus *A B C* 10. grad. angulus *C A B* 20. grad. quæreretur latus *B C*, dicendum esset, ut se habet sinus

ſinus anguli *B* (qui in tabulis eſt

Sin. angl. A. 20. gr.	9. 5340517.
AC. 10. ulnarum.	1. 0000000.
Summa	10. 5340517.
Sin. ang. B. 10. gr.	0. 2967702.
Reſiduum quod eſt CB. $19\frac{7}{10}$ ulnarum	1. 2943815.

17364) ad latus *AC*, quod eſt cognitum 10. ulnarum: ſic ſe habet ſinus anguli *A* (qui eſt in tabulis 34 202) ad latus *CB*. quod quæritur: ad hoc quartum *CB* inveniendum neceſſum eſſet muitiplicare ſecundum terminum 10. per tertium 34 202. & productum 342020. dividere per primum 17364. quod prolixum eſt. Sed loco horum numerorum accipimus illorum logarithmos, addendo logarithmum 20. grad. logarithmo 10. ulnarum, & à ſumma auferendo logarithmum 10. grad. & reſtabit logarithmus 1. 2943815. qui in tabula reperitur inter 19. & 20. ita ut latus *CB* ferme ſit 20. ulnarum.

Li-

Libri, qui ſinus & logarithmos tradunt, ſpecialius hæc explicant. Nihilominus puto me tantum dixiſſe, quantum ſcire neceſſe eſt, ut quis in his omnibus proprio marte progredi poſſit. Addentur quædam aliæ proportiones hanc rem concernentes in continuatione hujus Geometriæ.

41. *Invenire rectam, quæ quàm proxime æqualis ſit circumferentiæ circuli.* Sumtâ duodecies *b d* tangente 30. grad. hiſque duodecim tangentibus ita circa circulum diſpoſitis, ut ſemper binæ & binæ ponantur in directum, ceu videre eſt in figura art. 27. in qua *d g* ſunt duæ tangentes oppoſitæ, ita ut quælibet reſpondeat 30. grad. & ſimiliter *g h*, & *d i*, &c. producetur hac ratione polygonum circumſcriptum 6. laterum, cujus circumferentia major erit circumferentia circuli (427.) Si verò ſinus *i e* duodecies ſumatur, cujus circumferentia minor eſt circumferentia circuli. Hinc ſi radius *a b* datus ſit partium 1, 000, 000, erit tangens *b d* 577, 350. duodecies ſumta, id eſt, 6. 928, 200, major circumferentia cir-

circuli, & ſinus *ec* 500, 000 duodecies ſumtus, nimirum 6, 000,000, minor erit circumferentia circuli.

42. Sed ſi loco tangentis & ſinus de 30. grad. quem duodecies ſumſiſti, nunc accipias tangentem & ſinum unius gradus, nimirum 17455. & 17452. conſtituentur duo polygona, alterum circumſcriptum 6, 283, 800. majus, & alterum circumſcriptum 6, 282, 720. minus circulo:

43. Tandem ſit radius datus 100, 000, 000, 000. & accipiatur tangens & ſinus unius minuti 21600 (nam tot ſunt minuta in circulo) conſtituetur 628, 318, 512, 000 minus (nam ſinus 1. minuti eſt 29, 088, 820.) & 628, 318, 533, 600 majus. (nam tangens 1. minuti eſt 29, 088, 821.) Et ſi hi tres numeri, radii nimirum, polygoni circumſcripti & inſcripti dividantur per 100,000, reſtabunt pro radio 1,000,000: & perimeter polygoni circūſcripti erit 6, 283, 185 $\frac{336}{1000}$: & perimeter inſcripti erit 6, 283, 185 $\frac{12}{100}$. Ita ut hæ duæ

duæ circumferentiæ, quarum altera eſt major circumferentiâ circuli, & altera minor, nihilominus inter ſe non differant centum milleſima parte radii. Si quis voluerit ſumere ſinum & tangentem unius ſecundæ, immenſũ in modum proximior fieret æqualitas, perimetrorum polygoni circumſcripti & inſcripti.

44. In praxi aſſumitur diametrum eſſe quàm proxime ad circumferentiam ut 7. ad 22. id eſt, ſi ſemidiameter vel radius diviſus ſit in 7, circumferentia proxime continebit illarum partium 44: & hoc convenit cum eo, quod explicavimus. Nam 7. 44 :: 100. $628\frac{4}{7}$.

45. *Invenire aream circuli dati.* Si radius vel ſemidiameter diviſus ſit in 1000. circumferentia proxime habebit 6283. Jam multiplicata ſemiſſi hujus circumferentiæ 3141. per radium 1000. erit productum 3141000 pro tota area circuli: (4. 31.) Si verò ſemidiameter fuerit alterius menſuræ, exempli gratia, 9. pollicum, dicendum erit 1000. 3141 ::

9.

9. 16 $\frac{269}{1000}$ & ultimus hic numerus postea multiplicandus (qui esse debet semicircumferentia) per 9. (qui est semidiameter) & resultabunt $173\frac{421}{1000}$ pro area circuli.

Ut mihi videtur, magis commoda est hæc proportio de 1000. *ad* 3141. *quam illa quæ communiter adhibetur ut* 7. *ad* 22.

46. *Metiri capacitatem parallelopipedi, vel cylindri.* Multiplica basin per altitudinem perpendicularem.

47. *Metiri pyramidem vel conum.* Multiplica tertiam partem baseos per altitudinem.

48. *Metiri sphæram.* Multiplica tertiam partem superficiei per semidiametrum, vel etiam duas tertias maximi circuli per diametrum.

FINIS.